工程數學

Engineering Mathematics

–第一章：一階常微分方程式

- 基本概念與觀念
- 可分離微分方程式
- 模型化:可分離微分方程式
- 正合微分方程式與積分因子
- 線性微分方程式、柏努力方程式
- 模型化:電路

CLASS 01

- 本堂課大綱
  - 課程說明
  - 課程介紹
  - 微分方程式
  - 方向場
  - 方程式的解

課 程 說 明

- 上課進度：參看課堂分發的課程大綱
- 作業
  - 課本作業：隨堂考主要考試內容
  - 3, 5, 7, 25 (Sec. 1.1)
  - 2, 5 (Sec 1.2)
  - 2, 7, 18, 23, 24, 25 (Sec. 1.3)

積　極性補強教學

- 找2位修過本科目成績優異之高年級或研究生，每週於課後利用2小時輔導功課較差之同學，輔導學生按教師網頁資料或筆記內容，並參考教科書使學生瞭解課程內容，並可利用協助演練作業習題之方式，來增進其對工程分析上常用數學工具之瞭解。

何謂工程數學

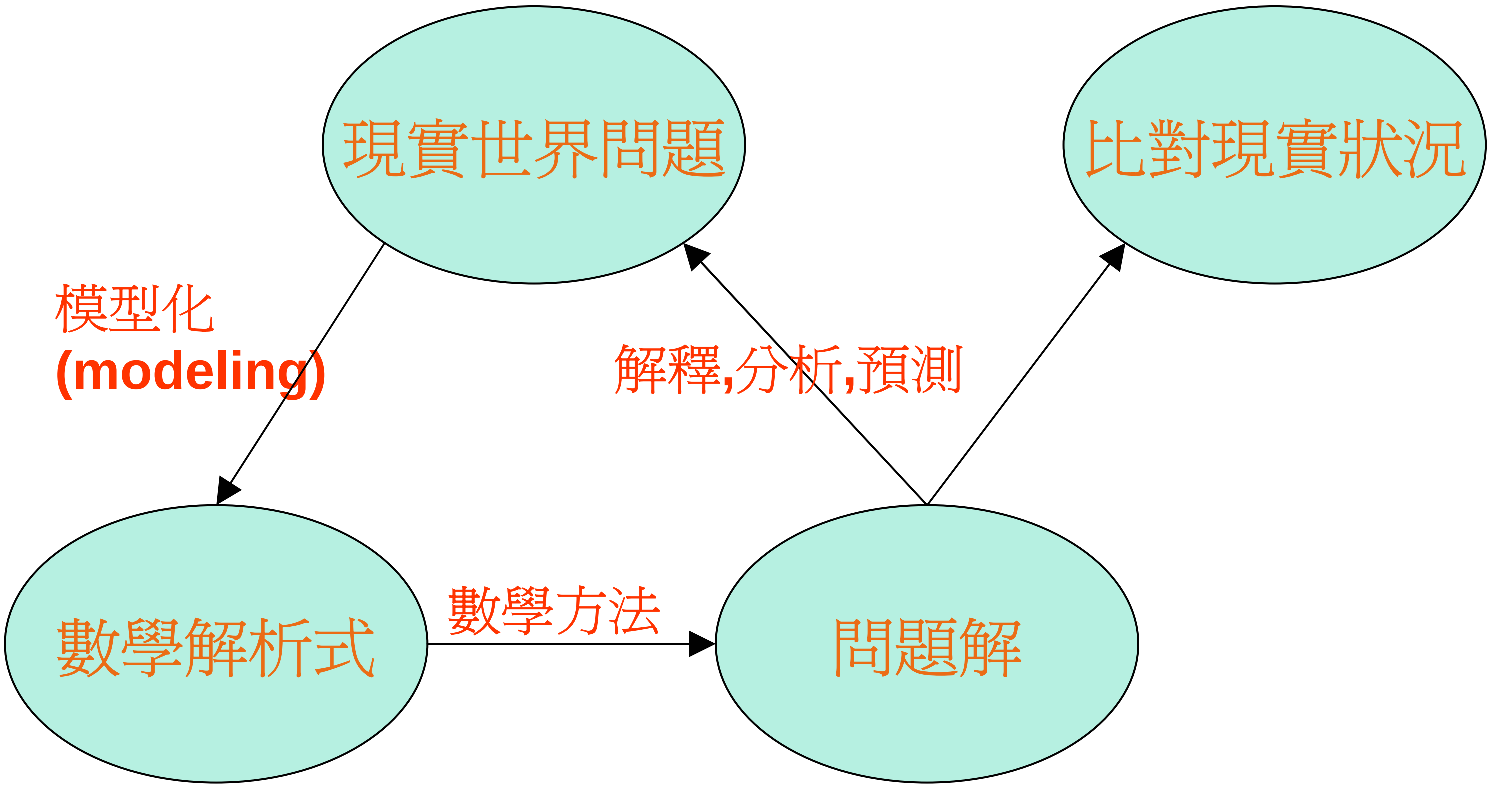
- 工程上我們通常將現實世界問題以數學方式（已存在之力學/電學/物理學等定律）予以描述（modeling 模式化），依據問題特性，使用適合之數學方法求解（例如統計機率、微分方程等），或以理論推導解之特性，將解運用於解釋或分析問題。
- 例如：

-衛星、拋射體、火箭、行星等運動問題之應用

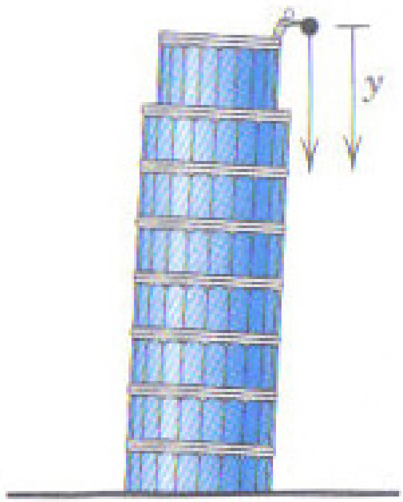
-熱傳導之研究

-放射性物質衰減週期的決定

系統圖解

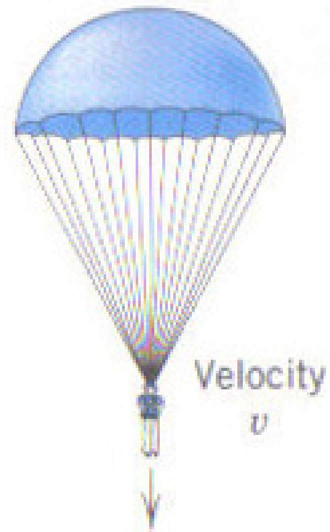


生活中的應用



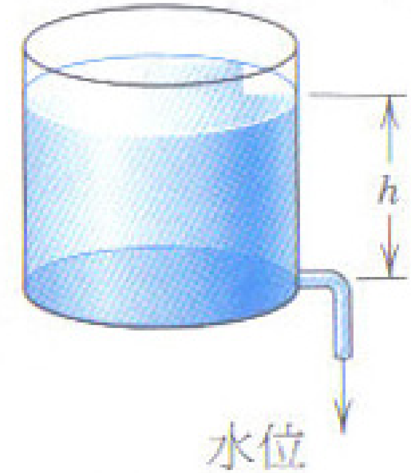
落石

$y'' = g = const.$



降落傘

$mv' = mg - bv^2$



流出的水

$h' = -k\sqrt{h}$

微 分 方 程

- 定義
  - 規範函數與其導數間之關係的方程式稱為微分方程 (differential equation)
- 舉例

$$\frac{dy}{dt} = ky \quad \Leftarrow 1.3\text{可分離微分方程}$$

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy \quad \Leftarrow 1.5 \quad u(x, y)\text{之全微分}$$

微 分 方 程

- 定義
  - 若未知函數僅含一個自變數，此微分方程稱爲常微分方程 (ordinary differential equation) ；否則稱爲偏微分方程 (partial differential equation)
- 舉例

$$\frac{dy}{dx} + 4y^2 = 3x; \quad y = y(x) \quad \Leftarrow \text{常微分方程}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0; \quad u = u(x, y) \quad \Leftarrow \text{偏微分方程}$$

微 分 方 程

- 定義
  - 若微分方程每一項均含有未知函數，此微分方程稱爲齊次方程 (homogeneous equation) ；否則稱爲非齊次方程 (nonhomogeneous equation)
- 舉例

$$\frac{dy}{dx}+4y^2=\boxed{3x} \quad y=y(x) \quad \Leftarrow \text{非齊次方程}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\boxed{0} \quad u=u(x,y) \quad \Leftarrow \text{齊次方程}$$

微 分 方 程

- 定義
  - 在一個方程式中，未知函數之間或未知函數與其導函數之間無相互乘積，且未知函數及其導函數均爲一次則稱爲線性方程式(linear eq.)，否則即稱爲非線性方程式(nonlinear eq.)。
- 舉例

$$x^2 + y^2 = 3 \quad \text{非線性方程(因爲x, y爲兩次以上)}$$

$$3\mathrm{x} + 2\mathrm{y} + 4\mathrm{z} = 5 \quad \text{線性方程(未知函數均爲一次)}$$

微 分 方 程

- 定義
  - 微分方程中最高導數項的導數階數成爲此方程的階數 (order)
- 舉例

$$\frac{dy}{dx}+4y^2=3x; \quad y=y(x) \quad \Leftarrow \text{一階方程}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0; \quad u=u(x,y) \quad \Leftarrow \text{二階方程}$$

P.S : 判斷階數的方法，亦即觀察方程式最多被微分幾次

一 階 常 微 分 方 程

- 通式

$$y' = f(x, y); \quad y = y(x)$$
$$or \quad F(\mathrm{x}, \mathrm{y}, y') = 0; \quad y = y(x)$$

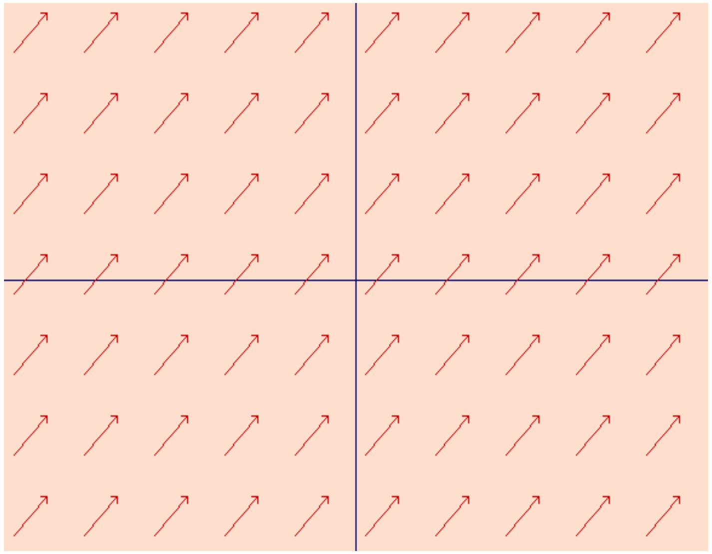
  - 常用來模擬物理現象在時間軸上的變化，因此自變數 x 通常代表時間
  - 若我們給予一個初始條件，那麼此方程恰有一解
  - 幾何意義：乃是在 x-y 平面上的任一點給予一個導數值，我們稱之爲方向場（direction field）或斜率場（slope field）
  - 若平面上有一條曲線，其所通過的每一點之斜率等於所給定之值 $f(x, y)$，則此曲線即爲解曲線（solution curve）

方 向 場

- 我們可以從方向場之圖形大略「看出」解曲線
- 例題：

$$f(x,y)=1$$

  - 方向場：在整個平面上，任一點的斜率均爲 1
  - 畫出方向場
  - 解曲線爲 $y = x + c$ 的平行線



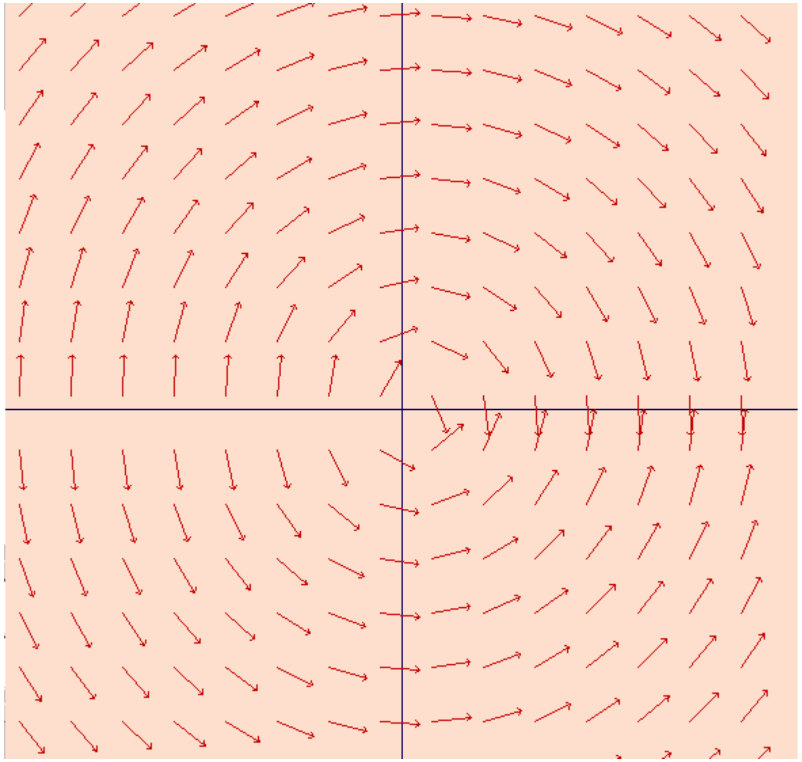
- 方向場繪圖網站

http://www.math.psu.edu/glasner/m251/Dirfield/Dirfield.html

另 一 個 例 子

$$y' = -x / y$$

- 觀察：兩垂直線的斜率之積是 -1
- 方向場：繞著原點轉動
- 解曲線似乎是繞著原點的同心圓



方程式的解

- 定義
  - 滿足微分方程的函數稱爲此方程的解 (solution)
- 舉例

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0; \quad u=u(x,y) \quad \Rightarrow \quad u=x^2-y^2$$

- 微分方程的解通常不只一個

通 解 與 特 解

- 以上所得到的答案稱爲通解（general solution）
- 若我們對積分常數指定一個特定的數值，那這個特定的解稱爲特解（particular solution）
  - 這種情況通常是發生於你希望這個解通過某一個點 (a, b)，或即 $y(a) = b$
  - 我們稱此等條件爲初始條件（initial condition），而其值稱爲初始值（initial value）

一 階 常 微 分 方 程

- 一個簡單的例子

$$y' = 2x$$

- 藉著積分

$$y = x^2 + c$$

  - 此函數的圖形是拋物線
  - 其中 c 稱爲積分常數（constant of integration）
  - 隨著 c 值的不同，拋物線會上下垂直平移

第一種解法 ---- 分 離 變 數 法

- 步驟一：將變數 x 與 y 分別移到等號的兩邊。譬如

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} \Rightarrow \quad ydy = -xdx$$

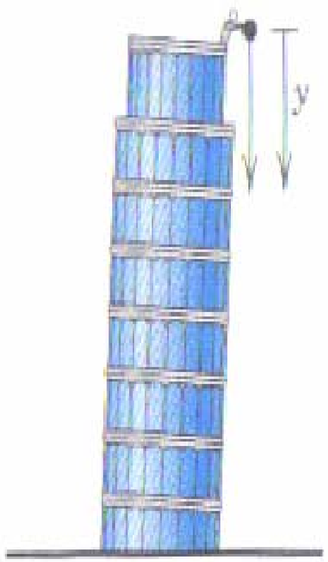
- 步驟二：將兩側積分

$$\frac{1}{2}y^2 + c_1 = -\frac{1}{2}x^2 + c_2$$

  - 把兩個積分常數合併在一起

$$x^2 + y^2 = c \quad \Leftarrow \quad c = 2(c_2 - c_1)$$

生活中的應用



落石

$y'' = g = const.$

自高塔丟下一石頭,初速度爲 $v_0 (t = 0)$ 其中我們令當時的高度爲基準點0的位置,我們可以得到一些關係式：

$$y'' = \frac{d^2 y}{dt^2} = g = \text{constant} = \text{加速度}$$

$\Downarrow$ 積分

$$y' = \frac{dy}{dt} = gt + c_0 = V(t), \text{另}t = 0\text{則可得}c_0 = v_0\text{爲初始速度}$$

$\Downarrow$ 積分

$$y = \frac{1}{2} g t^2 + v_0 t + c_1 = H(t)$$

應用 - 放射活動,指數衰變

- 假設在某一時間t=0時,一放射物質質量爲2g,試問經過某時間後剩下多少放射物質?
- Step 1：建立數學模型(微分方程式)

令y(t)爲時間t之物質質量,而改變速率爲 $\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dt}}$

則 $\frac{dy}{dt} = ky$,其中k爲一常數

- Step 2 ：解微分方程式

$$\frac{1}{y}dy = kdt\,;\, y = e^{kt+c^*}\,;\, y_{(t)} = ce^{kt} \Leftarrow \text{通解}$$

應用 - 放射活動,指數衰變

- Step 3：由初始條件(initial condition)決定特殊解

$\because$ 初始量 $y = 2g \Rightarrow y(0) = 2$ 此爲初始條件,

代入通解 $y(0) = ce^{0} = 2$

因此 $c = 2$,特殊解爲 $y(t) = 2e^{kt}$