Chapter 7　Linear Algebra

Matrices(矩陣)、Vectors(向量)、Determinants(行列式) and Linear Equations 線性方程式。

7-1 矩陣：將一群數有規則排列成長方形陣式，並以 ( ) 或 [ ] 包圍之。

例如: $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & -5 & 4 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} b \\ 1 \end{bmatrix}$, $[a_1, a_2, a_3]$, $\begin{bmatrix} 2 & i \\ -i & 5 \end{bmatrix}$

應用於 線性系統矩陣方程式

例如: $$\begin{cases} x+2y-z+4w=0 \\ 3x-4y+2z-6w=0 \\ x-3y-2z+w=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 3 & -4 & 2 & -6 \\ 1 & -3 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

m×n 矩陣 (m 列、n 行)之定義 :

$$A=[a_{ij}]=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m\times n}$$

a_{ij} 代表位於第 i 列第 j 行之數稱為 A 之元素(element)

常見矩陣之種類:

1. Column matrix(行矩陣)
   (vector)

$$b=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

2. **Row matrix(列矩陣)**(vector)
   $a=[a_1, a_2, a_3, \cdots\cdots, a_n]$
3. **Square matrix (方陣)**　m = n（行數等於列數）
4. Triangular matrix(三角矩陣)

$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -5 & 1 & 0 \\ 9 & 4 & 2 \end{bmatrix}$ 下三角矩陣　　$\begin{bmatrix} 3 & -5 & 6 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ 上三角矩陣

5. **Diagonal matrix(對角矩陣)** $\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & & 0 \\ 0 & a_{22} & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$

6. Unit matrix(單位矩陣)

$$I=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

7. Transpose matrix(轉置矩陣)

m×n 之行列互換為 n×m

$$A=\begin{bmatrix}1&2&5\\4&7&-5\end{bmatrix}\qquad A^T=\begin{bmatrix}1&4\\2&7\\5&-5\end{bmatrix}$$

8. Symmetric matrix(對稱矩陣)

$A^T=A$ 或 $A=A^T$

$(a_{ji}=a_{ij})$

$$A=\begin{bmatrix}1&2&7\\2&3&-4\\7&-4&5\end{bmatrix}$$

9. Skew-symmetric matrix(反對稱矩陣)

$$A=\begin{bmatrix}0&-2&1\\2&0&4\\-1&-4&0\end{bmatrix}$$

$A^T=-A$

$a_{ji}=-a_{ij}$

若 $i=j$, $a_{ii}=-a_{ii} \Rightarrow 2a_{ii}=0 \Rightarrow a_{ii}=0$

任一實數方陣 A 可變成一對稱矩陣 R 和一反對稱矩陣 S 之和。

$$R=\frac{1}{2}\left(A+A^T\right)\quad S=\frac{1}{2}\left(A-A^T\right)\quad \Rightarrow R+S=A$$

矩陣之相等性 $A=B$ $(a_{jk}=b_{jk})$

$a_{11}=b_{11}, a_{22}=b_{22} \cdots a_{mn}=b_{mn}$

矩陣之加法(同為 n×m 矩陣)

$A+B=\left[a_{ij}+b_{ij}\right]$ 例：$\begin{pmatrix}1&2&3\\2&4&-6\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&8&-4\\3&4&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&10&-1\\5&8&-6\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}1&2&3\\2&4&-6\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2&5\\8&0\end{pmatrix}$=不存在

純量相乘： α 為純量 $\alpha A=\left[\alpha a_{ij}\right]$

$$A=\begin{bmatrix}8&0\\2&4\\10&-6\end{bmatrix}\qquad \frac{A}{2}=\begin{bmatrix}4&0\\1&2\\5&-3\end{bmatrix}$$

7-2 矩陣相乘(matrix multiplication)

矩陣相乘的先決條件為 A 之行數 =B 之列數

$A=\lfloor a_{jk} \rfloor m \times \underline{\underline{n}}$矩陣 $\qquad B=\lfloor b_{jk} \rfloor \underline{\underline{r}} \times p$矩陣

n = r 成立，方可相乘

$AB = C \quad \Rightarrow \quad C_{jk}=\sum_{l=1}^{n} a_{jl} b_{lk} = a_{j1} b_{l1} + a_{j2} b_{l2} + \cdots + a_{jn} b_{nk}$

＊矩陣相乘

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{2\times3} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}_{3\times1} = \begin{bmatrix} 1\times1+2\times2+1\times1 \\ 2\times1+0\times2+1\times1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \end{bmatrix}_{2\times1}$$

$B_{3x1}\ A_{2x3}$ →不存在(沒有定義)

AB≠BA

AB= 0 不代表 A= 0 或 B= 0

Ex: $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

AB=AC ⇒ B= C (不成立)

＊ Linear Transformation (線性轉換)

$$Y = AX \Rightarrow \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$X = BW \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix}$$

Y=AX=A(BW)=(AB)W=CW
(C=AB)

Matrix determinants(矩陣行列式): 由方陣 A 之元素所形成之行列式

行列式值 (Determinants)

D=detA=$|A|$ **A=**$\lfloor a_{jk} \rfloor_{n\times n}$方陣

2×2 矩陣(二階行列式值) $D = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$

3×3 矩陣(三階行列式值)

$$D = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

四階行列式$(4\times4$矩陣$)$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{14} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{vmatrix}$$

D= detA

行列式之一性值：

(i) 行列式可換行或換列，其行列式絕對值不變。

(ii)若有二列或二行元素成比例，其行列式值為零。

Ex:

$$D=\begin{vmatrix}1 & 3 & 0\\ 2 & 6 & 4\\ -1 & 0 & 2\end{vmatrix}=1\begin{vmatrix}6 & 4\\ 0 & 2\end{vmatrix}-3\begin{vmatrix}2 & 4\\ -1 & 2\end{vmatrix}+0\begin{vmatrix}2 & 6\\ -1 & 0\end{vmatrix}$$

$$=12-3(4+4)+0(0+6)=-12$$

7-3 Linear Systems of Equations, Gauss Elimination 高斯消去法

Linear System

$\boxed{Ax=b}$

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots a_{1n}x_n&=b_1\\
a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots a_{2n}x_n&=b_2\\
\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \quad &\ \ \vdots\\
a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots a_{mn}x_n&=b_m
\end{aligned}$$

$$A=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}\end{bmatrix}_{m\times \underline{\underline{n}}} \quad X=\begin{bmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}_{\underline{\underline{n}}\times 1} \cdot B=\begin{bmatrix}b_1\\ \vdots\\ b_m\end{bmatrix}_{m\times 1}$$

＊ 矩陣列運算(**row operation**)等同於消去法

矩陣列運算簡化矩陣(**reduced matrix**)基本列運算，對 **A** 之諸列向量之處理有三種基本運算

(i) 列調運算 r_{ij}(表示 **i** 列和 **j** 列互調)

(ii) 倍乘運算 r_i^k (表示 **i** 列×**k** 倍)

(iii) ★加入運算 $r_i{}^k{}_j$ (**k**≠0)

(**i** 列×k 倍加入 j 列)

Ex: $3x_1+4x_2=7$

$2x_1+3x_2=1$ 化為單位矩陣 $\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$

$$\left[\begin{array}{cc|c}3 & 4 & 7\\ 2 & 3 & 1\end{array}\right]\xrightarrow{r_{12}^{-\frac{2}{3}}}\left[\begin{array}{cc|c}3 & 4 & 7\\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{11}{3}\end{array}\right]\xrightarrow{r_2^{3}}\left[\begin{array}{cc|c}3 & 4 & 7\\ 0 & 1 & -11\end{array}\right]\xrightarrow{r_{21}^{-4}}\left[\begin{array}{cc|c}3 & 0 & 51\\ 0 & 1 & -11\end{array}\right]\xrightarrow{r_1^{\frac{1}{3}}}\left[\begin{array}{cc|c}1 & 0 & 17\\ 0 & 1 & -11\end{array}\right]$$

$X_1=17$

$X_2=-11$

＊Linear Independence and Dependence of Vectors 線性獨立和相依之向量組合

有一 $a_1, a_2 \cdots a_m$ 之向量組合，若 $c_1, c_2 \cdots c_m$ 為不全為零的數

且方程式 $c_1 a_1 + c_2 a_2 + \cdots + c_m a_m = 0$

則稱 $(a_1, a_2 \cdots a_m)$ 為一線性相依組合

若 $(a_1, a_2 \cdots a_m)$ 中沒有向量可由其他向量組合而成，則為線性獨立。

Ex1: i, j, k,-i+4j-3k

$C_1 i + C_2 j + C_3 k + C_4(-i+4j-3k) = 0$

$C_1=1$

$C_2=-4$

$C_3=3$

$C_4=1$

＊ -i+4j-3k 可由其他向量所組合而成

故此向量組為線性相依

Ex2:

$$A=\begin{bmatrix}1\\2\\-1\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}2\\1\\0\end{bmatrix},\quad C=\begin{bmatrix}0\\3\\-2\end{bmatrix}$$

$$c_1 A + c_2 B + c_3 C = 0$$

$$\Rightarrow 2A - B - C = 0$$

故為線性相依

亦可用行列式判斷是否為線性相依或線性獨立

$$\begin{vmatrix}1 & 2 & 0\\2 & 1 & 3\\-1 & 0 & -2\end{vmatrix}$$

＝0 故為線性相依

≠0 則為線性獨立

用行列式值判斷

$$[A,B,C]=\begin{vmatrix}1 & 2 & 0\\2 & 1 & 3\\-1 & 0 & -2\end{vmatrix}=-2-6+8=0 \qquad \Rightarrow \text{線性相依}$$

7-4 Rank a Matrix(矩陣之秩)

矩陣 A=$\lfloor a_{jk} \rfloor$ 之最大獨立列向量之個數

即為秩(Rank)或因次(Dimension)

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ -1 & -2 & 0 \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{列運算}(r_{13}^{-1})} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$,故 Rank 為 2

Rank of a Matrix (矩陣之秩)

＊於一(m×n)矩陣 A 中有一 (r×r) $[r \le \text{m及n}]$ 之矩陣之行列市值不為零，而所有 $(r+1)\times(r+1)$之部分矩陣行列式均為零，則矩陣之 Rank 為 r。

Ex:

1. $$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 7 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_{13}^{-1}, r_{23}^{-1}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_{12}^{-2}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_{21}^{2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

   有兩個獨立之列向量，故 Rank A = 2

2. $$A=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 7 \end{vmatrix}_{3\times3} = 0 \qquad 2\times2\text{的矩陣}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -1 \ne 0$$

故 Rank A = 2

Ex:

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 3 & 4 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -2 & 7 \end{bmatrix}_{3\times4} \quad \text{求} Rank\ A$$

所有 3×3 矩陣

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 3 & 0 & -1 \\ -1 & -2 & 7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & -1 \\ -1 & 0 & 7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

之行列式值均為零

任一 2×2 矩陣 $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = 4-6 = -2 \ne 0$

故 $Rank\ A = 2$

7-5 Solutions of Linear Systems Existence, Uniqueness

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad x=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad b=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

AX=B , $\Rightarrow A =$

定義：Augumented matrix $\tilde{A} = [A|b]$

$$\tilde{A} = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]_{m\times(n+1)}$$

若 Rank A = Rank($\tilde{A}$) 有解

→ 1. 若 A 為 n×n 矩陣，Rank(A)=Rank($\tilde{A}$)=n

則有單一解(n= r) 設 r 為獨立列向量個數

2.若 n ＞ r , Rank($\tilde{A}$) = Rank(A)=r 則有無限多組解 (m×n 矩陣)

3.若 Rank(A)＜ Rank($\tilde{A}$)無解

Ex1-1:

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 = 7 \\ 2.25x_1 + 3x_2 = 5.25 \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2.25 & 3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad Rank(A) = 1$$

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 7 \\ 2.25 & 3 & 5.25 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_{12}^{-0.75}} \begin{bmatrix} 3 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad Rank(\tilde{A}) = 1$$

因$Rank(A) = Rank(\tilde{A})$,故有解

但$r = 1$(獨立列向量個數)$< n = 2$(未知數個數)為無限多組解

Ex1-2:

$$\begin{cases} 3X_1 + 4X_2 = 7 \\ 2.25X_1 + 3X_2 = 1 \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2.25 & 3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad RankA = 1$$

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 7 \\ 2.25 & 3 & 5.25 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_{12}^{-0.75}} \begin{bmatrix} 3 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & -4.25 \end{bmatrix}$$

$Rank(\tilde{A}) = 2 > Rank(A) = 1$ 無解(矛盾方程式)

Ex1-3:

$$\begin{cases} 3x_1+4x_2=7 \\ 2x_1+3x_2=1 \end{cases}$$

$$A=\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \tilde{A}=\begin{bmatrix} 3 & 4 & 7 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$Rank(A)=Rank(\tilde{A})=2$,單一組解

$$\left[\begin{array}{cc|c} 3 & 4 & 7 \\ 2 & 3 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\text{列運算}} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 17 \\ 0 & 1 & -11 \end{array}\right] \Rightarrow x_1=17,\ x_2=-11$$

Ex1-4

$$\begin{cases} 4x_1+5x_2=2 \\ x_1-2x_2=7 \end{cases}$$

$$A=\begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}, \tilde{A}=\begin{bmatrix} 4 & 5 & 2 \\ 1 & -2 & 7 \end{bmatrix}$$

$Rank(A)=Rank(\tilde{A})=2$, 單一組解

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 7 \\ 4 & 5 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{\text{列運算}} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{array}\right] \Rightarrow x_1=3,\ x_2=-2$$

Ex1-5

$$\begin{cases} 1x_1+2x_2+3x_3=0 \\ 2x_1+5x_2+4x_3=0 \end{cases}$$

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 4 \end{bmatrix}, \tilde{A}=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 5 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

$Rank(A)=Rank(\tilde{A})=2,\ n>r$ 無限多組解

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 5 & 4 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_{12}^{-2}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_{21}^{-2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow x=\begin{bmatrix} 7x_3 \\ -2x_3 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$let \quad x_3=t, \quad x=\begin{bmatrix} 7t \\ -2t \\ t \end{bmatrix}$$

7.3 Solve System of Linear System(解出線性系統方程式)

(i) Gauss elimination (高斯消去法)

(ii) Cramer's rule (n 個方程,n 個未知數)

Ax = b 且有單一組解

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

則 $$x_1=\frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \\ b_m & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{vmatrix}}{|A|}$$

$x_2=\cdots$

$x_n=?$

(i)Gauss elimination (高斯消去法)

Ex1: $\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 = 2 \\ 4x_1 + 3x_2 = 18 \end{cases}$ 利用列運算方式求解

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 5 & 2 \\ 4 & 3 & 18 \end{array}\right] \xrightarrow{r_{12}^{-2}} \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 5 & 2 \\ 0 & -7 & 14 \end{array}\right] \xrightarrow{r_{2}^{-\frac{1}{7}}} \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \end{array}\right] \xrightarrow{r_{21}^{-5}} \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 0 & 12 \\ 0 & 1 & -2 \end{array}\right] \xrightarrow{r_{1}^{\frac{1}{2}}} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & -2 \end{array}\right]$$

$x_1 = 6$, $x_2 = -2$

Ex2: $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ -x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ \quad 10x_2 + 25x_3 = 90 \\ 20x_1 + 10x_2 = 80 \end{cases}$

Ax=b

$$\tilde{A} = \left[A|b\right] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 10 & 25 & 90 \\ 20 & 10 & 0 & 80 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_{12}^{1}} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 25 & 90 \\ 20 & 10 & 0 & 80 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_{14}^{-20}} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 25 & 90 \\ 0 & 30 & -20 & 80 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_{24}, r_{23}} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 10 & 25 & 90 \\ 0 & 30 & -20 & 80 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_{23}^{-3}} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 10 & 25 & 90 \\ 0 & 0 & -95 & -190 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_{3}^{-\frac{1}{95}}} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 10 & 25 & 90 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_{32}^{-25}} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 10 & 0 & 40 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$x_1 - x_2 + x_3 = 0$ $\qquad$ $x_2 = 4$
$10x_2 = 40$ $\qquad$ $x_1 = 2$
$x_3 = 2$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Ex3:Ax=b

$$\tilde{A}=\left[\begin{array}{cccc|c}3 & 2 & 2 & -5 & 8\\ 0.6 & 1.5 & 1.5 & -5.4 & 2.7\\ 1.2 & -0.3 & -0.3 & 2.4 & 2.1\end{array}\right]\xrightarrow{r_{12}^{-\frac{1}{5}},r_{13}^{-\frac{2}{5}}}\left[\begin{array}{cccc|c}3 & 2 & 2 & -5 & 8\\ 0 & 1.1 & 1.1 & -4.4 & 1.1\\ 0 & -1.1 & -1.1 & 4.4 & -1.1\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{r_{23}^{1}}\left[\begin{array}{cccc|c}3 & 2 & 2 & -5 & 8\\ 0 & 1.1 & 1.1 & -4.4 & 1.1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right]\xrightarrow{r_{2}^{\frac{1}{1.1}}}\left[\begin{array}{cccc|c}3 & 2 & 2 & -5 & 8\\ 0 & 1 & 1 & -4 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right]\xrightarrow{r_{21}^{-2}}\left[\begin{array}{cccc|c}3 & 0 & 0 & 3 & 6\\ 0 & 1 & 1 & -4 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{r_{1}^{\frac{1}{3}}}\left[\begin{array}{cccc|c}1 & 0 & 0 & 1 & 2\\ 0 & 1 & 1 & -4 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right]$$

故 $x_1+x_4=2\Rightarrow x_1=2-x_4$

$x_2+x_3-4x_4=1\Rightarrow x_2=1-x_3+4x_4$;

無限多組解$(x_3, x_4$確定$, x_1, x_2$為唯一解$)$，令$x_3=\alpha, x_4=\beta$;則$x_1=2-\beta, x_2=1-\alpha+4\beta$

得解為, $\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2-\beta\\1-\alpha+4\beta\\\alpha\\\beta\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\1\\0\\0\end{bmatrix}+\alpha\begin{bmatrix}0\\-1\\1\\0\end{bmatrix}+\beta\begin{bmatrix}-1\\4\\0\\1\end{bmatrix}$

Ex4: (HW)

$\begin{cases}-x_1+x_2+2x_3=2\\3x_1-x_2+x_3=6\\-x_1+3x_2+4x_3=4\end{cases}$ $\quad\tilde{A}=\left[\begin{array}{ccc|c}-1 & 1 & 2 & 2\\ 3 & -1 & 1 & 6\\ -1 & 3 & 4 & 4\end{array}\right]$ $\quad Ans: x_1=1 \quad x_2=-1 \quad x_3=2$

Ex5:

$$\begin{cases}3x_1+2x_2+x_3=3\\2x_1+x_2+x_3=0\\6x_1+2x_2+4x_3=0\end{cases}$$

$$\Rightarrow\left[\begin{array}{ccc|c}3 & 2 & 1 & 3\\ 2 & 1 & 1 & 0\\ 6 & 2 & 4 & 0\end{array}\right]\xrightarrow{r_{12}^{-\frac{2}{3}},r_{13}^{-2}}\left[\begin{array}{ccc|c}3 & 2 & 1 & 3\\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -2\\ 0 & -2 & 2 & -6\end{array}\right]\xrightarrow{r_{23}^{-6}}\left[\begin{array}{ccc|c}3 & 2 & 1 & 3\\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -2\\ 0 & 0 & 0 & 6\end{array}\right]$$

矛盾方程式(無解)

$\text{Rank}(A)=2$

$\text{Rank}(\tilde{A})=3$

$\text{Rank}(\tilde{A})>\text{Rank}(A)\rightarrow$ 無解

7-6 Vector-space(向量空間) Dimension (因次) Basis (基底)

Dimension (因次)：最大線性獨立之向量個數

Basis(基底)：一線性獨立之組 V 包含最大可能獨立向量之數目，此獨立向量組稱為基底

Ex1: 所有向量為 R^3，使得 $2V_1+3V_3=0, V_3=-\frac{2}{3}V_1$

$$(v_1, v_2, v_3)=\left(v_1, v_2, -\frac{2}{3}v_3\right)=v_1\left(1, 0, -\frac{2}{3}\right)+v_2(0, 1, 0)$$

則$[-3,0,2],[0,1,0]$為基底，因次為 2

Ex2: 在 R^3 之空間以 i、j、k 為基底。

Ex3: 所有向量為 R^3 之空間，使得 $2x+3z=0$

$$z=-\frac{2}{3}x,\quad (x, y, z)=\left(x, y, -\frac{2}{3}x\right)=x\left(1, 0, -\frac{2}{3}\right)+y(0, 1, 0)$$

則$\left[1,\ 0,\ -\frac{2}{3}\right], [0,\ 1,\ 0]$ 為基底

7-7 Determinants , Cramer's Rule (行列式值)

A 為方陣(square matrix)

$D=\det A=|A|\ , A=[a_{jk}]_{n\times n}$ 矩陣

↘A 之行列式值

D= det A = 0 (singular matrix) 奇異矩陣

→不能做反矩陣。裡面的某些列向量不是線性獨立(某些列向量是線性相依)。

＊行列式之一般性質：

(i) 行列式可換行或換列，其行列式絕對值不變

(ii) 若有二行或二列元素成正比，其行列式值為零（∵線性相依)

＊行列式不管經過幾次列運算，其值不變。

Ex:

$$D=\begin{vmatrix}1 & 3 & 0\\ 2 & 6 & 4\\ -1 & 0 & 2\end{vmatrix}=1\begin{vmatrix}6 & 4\\ 0 & 2\end{vmatrix}-3\begin{vmatrix}2 & 4\\ -1 & 2\end{vmatrix}+0\begin{vmatrix}2 & 6\\ -1 & 0\end{vmatrix}=12-3(4+4)+0=-12$$

＊常見行列式值之性質：

AB≠BA

(i) $|AB|=|A||B|=|B||A|=|BA|$

(ii)$\det A^T=\det A$ （｜A^T｜=｜A｜)

$Ax = b$

$A^{-1}Ax=A^{-1}b$ A 有反矩陣之條件：1.需為方陣

$x=A^{-1}b$ 2.det A≠0

6-8 Inverse of a Matrix (反矩陣) , Gauss-Jordan Elimination

若 A 為以 n×n 矩陣，且 detA≠0 (det A= 0, singular matrix)

$AA^{-1}=A^{-1}A=I$(其中 A^{-1} 為反矩陣)

$$A^{-1}=\frac{1}{\det A}[adj\ A_{jk}]^T$$

↘從屬矩陣(adjoint matrix)

(Rank A = n 或 det A≠0 為必要條件) detA=0,則 RankA≠n

2×2 矩陣

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\ ,\ A^{-1}=\frac{1}{\det A}\begin{bmatrix} |a_{22}| & -|a_{21}| \\ -|a_{12}| & |a_{11}| \end{bmatrix}^T=\frac{1}{\det A}\begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}$$

Diagonal matrix (對角矩陣)

$$A=D=\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}\ ,\ A^{-1}=\begin{bmatrix} \frac{1}{a_{11}} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{a_{22}} & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \frac{1}{a_{nn}} \end{bmatrix}$$

3×3 matrix (矩陣)

Ex:

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & -2 \end{bmatrix}\ ,\ detA=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix}=7$$

$$A^{-1}=\frac{1}{detA}[adjA]^T=\frac{1}{7}\begin{bmatrix} -3 & 8 & 6 \\ 7 & -14 & 7 \\ -1 & 5 & 2 \end{bmatrix}$$

$$[adjA]^T=\begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \end{bmatrix}^T=\begin{bmatrix} -3 & 7 & -1 \\ 8 & -14 & 5 \\ 6 & -7 & 2 \end{bmatrix}^T=\begin{bmatrix} -3 & 8 & 6 \\ 7 & -14 & 7 \\ -1 & 5 & -2 \end{bmatrix}$$

＊反矩陣之性質公式

$$(A^{-1})^{-1}=A$$
$$(AC)^{-1}=C^{-1}A^{-1}$$
$$AC(AC)^{-1}=I$$
$$(A^T)^{-1}=(A^{-1})^T$$

linear system 之應用

Ax=b

$A^{-1}Ax= A^{-1}b$

$\Rightarrow x=A^{-1}b$

$$[A|I]\xrightarrow{\text{乘}A^{-1}}[A^{-1}A|A^{-1}I]\rightarrow[I\ |A^{-1}]$$

利用 <u>Gauss-Jordan Elimination 求 A^{-1}</u>

Ex 2:

$$A=\begin{bmatrix}-1 & 1 & 2\\ 3 & -1 & 1\\ -1 & 3 & 4\end{bmatrix}\quad ,求\ A^{-1}$$

$$[A|I]=\left[\begin{array}{ccc|ccc}-1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0\\ 3 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0\\ -1 & 3 & 4 & 0 & 0 & 1\end{array}\right]\xrightarrow{r_{13}^{-1},\,r_{12}^{3}}\left[\begin{array}{ccc|ccc}-1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 7 & 3 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 2 & -1 & 0 & 1\end{array}\right]\xrightarrow{r_{23}^{-1}}\left[\begin{array}{ccc|ccc}-1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 7 & 3 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -5 & -4 & -1 & 1\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{r_1^{-1},\,r_2^{0.5},\,r_3^{-0.2}}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & -1 & -2 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 3.5 & 1.5 & 0.5 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0.8 & 0.2 & -0.2\end{array}\right]\xrightarrow{r_{31}^{2},\,r_{32}^{-3.5}}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & -1 & 0 & 0.6 & 0.4 & 0.3\\ 0 & 1 & 0 & -1.3 & -0.2 & 0.7\\ 0 & 0 & 1 & 0.8 & 0.2 & -0.2\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{r_{21}^{1}}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & -0.7 & 0.2 & 0.3\\ 0 & 1 & 0 & -1.3 & -0.2 & 0.7\\ 0 & 0 & 1 & 0.8 & 0.2 & -0.2\end{array}\right]$$

故得 $A^{-1}=\begin{bmatrix}-0.7 & 0.2 & 0.3\\ -1.3 & -0.2 & 0.7\\ 0.8 & 0.2 & -0.2\end{bmatrix}$ $\quad ,check\ AA^{-1}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=I$

Application of matrix multiplication

Ex. Stochastic matrix, Markov process, 在 2004 年一面積為 60 平方哩的城市，其土地使用情形為

I　商用用地　25%

II　工業用地　20%

III　住宅用地　55%

假設五年期的轉移機率為

$$\begin{array}{cccc} & \text{至 I} & \text{至 II} & \text{至 III} \\ A= & \begin{bmatrix}0.7 & 0.1 & 0\\ 0.2 & 0.9 & 0.2\\ 0.1 & 0 & 0.8\end{bmatrix} & \begin{array}{l}\text{由 I}\\ \text{由 II}\\ \text{由 III}\end{array}\end{array}$$

求 2009, 2014, 2019 的土地使用情形。

解： 由矩陣 A 及 2004 的情形可得 2009 的情形為

I　$0.7\cdot 25+0.1\cdot 20+0\cdot 55=19.5[\%]$

II　$0.2\cdot 25+0.9\cdot 20+0.2\cdot 55=34.0[\%]$

III　$0.1\cdot 25+0\cdot 20+0.8\cdot 55=46.5[\%]$

令行向量表 x 表 2004 的情形，即 $x^T=[25\ \ 20\ \ 55]$，再以 y 表 2009 的情形，則

$$y^T=x^TA^T=[25\ 20\ 55]\begin{bmatrix}0.7 & 0.1 & 0\\ 0.2 & 0.9 & 0.2\\ 0.1 & 0 & 0.8\end{bmatrix}^T=[19.5\ 34\ 46.5]$$

同理，2014 年及 2019 年的情形分別為

$$z^T = y^T A^T = (x^T A)A = x^T A^2 = [17.05\ 43.8\ 39.15]$$
$$u^T = z^T A^T = (x^T A^2)A = x^T A^3 = [16.315\ 50.660\ 33.025]$$

答：

2009 年時商業用用地佔 19.5% 工業用地佔 34.0% 住宅用地佔 46.5%	2014 年時商業用用地佔 17.05% 工業用地佔 43.8% 住宅用地佔 39.15%	2019 年時商業用用地佔 16.315% 工業用地佔 50.660% 住宅用地佔 33.025%

Example for AHP

A.X = λX