第 7 章 線性代數：矩陣，向量，行列式，線性方程組

矩陣，向量：加法與純量乘積

■ **矩陣**（matrix）係以包圍在括號內的數（或函數）所成矩形陣列。這些數字（或函數）稱為**矩陣的項**（entry）（或有時稱為元素），例如：

$$(1)\qquad \begin{bmatrix} 0.3 & 1 & -5 \\ 0 & -0.2 & 16 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} e^{-x} & 2x^2 \\ e^{6x} & 4x \end{bmatrix}, \qquad [a_1 \quad a_2 \quad a_3], \qquad \begin{bmatrix} 4 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

均為矩陣。第1 個矩陣有兩**列**（rows）（水平排列項）和三

行（columns）（垂直行）。第 2 和第 3 個矩陣是**方陣**（square matrices）。也就是說，每一個均有相同的列數與行數（分別為 3 行與 2 行）。第 2 個矩陣中項具有兩個下標，表示該項的位置。第一下標是列的數目，第二下標是該項所在位置的行數。因此，如 a_{23}（唸成 *a* 貳乘參）指第 2 列、第 3 行。此符號係標準記號，不管其是否為矩陣。

- 僅具有單一列或行的矩陣稱為**向量**（vectors）。因此，在 (1) 式中第 4 個矩陣只有 1 列稱為**列向量**（row vector），而 (1) 式中最後一個矩陣僅有一行稱為**行向量**（column vector）。

範例 1　線性系統，矩陣的主要應用

- 在一聯立線性方程系統，簡稱為**線性系統**（linear system），諸如：

$$\begin{aligned} 4x_1 + 6x_2 + 9x_3 &= 6 \\ 6x_1 \qquad\;\; - 2x_3 &= 20 \\ 5x_1 - 8x_2 + x_3 &= 10 \end{aligned}$$

- **未知數**（unknows）x_1、x_2、x_3 的係數是**係數矩陣**（coefficient matrix）的項，稱為 A

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 6 & 9 \\ 6 & 0 & -2 \\ 5 & -8 & 1 \end{bmatrix}. \qquad \text{矩陣} \qquad \tilde{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 4 & 6 & 9 & 6 \\ 6 & 0 & -2 & 20 \\ 5 & -8 & 1 & 10 \end{bmatrix}$$

範例 1 (續)

係經由線性方程組右邊來擴大A 所獲得，同時又稱為此方程系統的**擴大矩陣**（augmented matrix）。本系統的係數顯示在 A 之中，就如方程系統中的型態一般。換句話說，在矩陣 A 中，它們的位置對應在以上所顯現的系統的位置。同理，對$\tilde{A}$亦成立。

- 我們將看見擴大矩陣 $\tilde{A}$ 包含關於此一方程組解的所有資料，如此一來，藉著擴大矩陣的計算，可解出此一方程組。
- 在6.3 節開頭，我們會詳細討論此一情況。同時，你也可藉代入法證實其解為 $x_1 = 3$，$x_2 = 1/2$，$x_3 = -1$。
- 未知數以符號 x_1、x_2 與 x_3 為代表，較實用但非必要；我們也可選擇 x、y、z 或一些其它字母。

範例 2 矩陣形式表示的銷售數字

- 某家商店的三種產品 I、II、III 在每一星期中，星期一（M），星期二（T），...的銷售數字可排成如下的矩陣形式

$$
\begin{array}{c}
\\
\mathbf{A} =
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccc} \mathrm{M} & \mathrm{T} & \mathrm{W} & \mathrm{Th} & \mathrm{F} & \mathrm{S} \end{array} \\
\begin{bmatrix} 400 & 330 & 810 & 0 & 210 & 470 \\ 0 & 120 & 780 & 500 & 500 & 960 \\ 100 & 0 & 0 & 270 & 430 & 780 \end{bmatrix}
\end{array}
\begin{array}{c} \\ \mathrm{I} \\ \mathrm{II} \\ \mathrm{III} \end{array}
$$

- 若該公司擁有十家商店，就可建立十個如上矩陣，每一家店以一個矩陣表示。那麼將這些矩陣的各對應項加起來，即可得到以矩陣顯示每一天每一種產品的總銷售額。你能想到其它可運用矩陣的數據來嗎？例如，在運輸或倉儲問題中？或是紀錄打電話的次數？或是道路網的距離清單？

通用概念與符號

■ 本書以粗黑大寫字母 *A*、*B*、*C*,…代表矩陣，或以括號內通項寫出；如此成為 $A = [a_{jk}]$ 等。使用 **m × n 矩陣**（唸成 *m* 乘 *n* 矩陣）來表示具有 *m* 列與 *n* 行的矩陣─列總是第一個出來！m × *n* 稱為此矩陣的大小。如此一個 *m* × *n* 矩陣的形式表為

(2)
$$\mathbf{A} = [a_{jk}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

- 在 (1) 式的矩陣大小分別為 2×3 、 3×3 、 2×2 、 1×3 和 2×1。
- 在 (2) 式每一項具有兩個下標。第一下標是列數而第二個則為行數。因此 a_{21}為第 2 列與第 1 行的項。
- 若$m = n$，則稱 A 為 $n\times n$ 方陣。那麼矩陣對角線所含的項 $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ 稱為 A 的**主對角線**（main diagonal）。這樣(1)式中兩個的主對角線分別為 a_{11}、a_{22}、a_{33} 和 e^{-x}、$4x$。
- 誠如所見，方陣是十分重要的。不是方陣的 A 矩陣便稱為**矩形矩陣**（rectangular matrix）。

向量

- 向量為只有一列或一行的矩陣。矩陣的項稱為向量的**分量**（components）。本書以**小寫**（lowercase）粗黑字母 **a**、**b**、…或一般分量加括號來代表，即 $\mathbf{a} = [a_j]$等。(1) 式中的特別向量暗示一般列向量的形式為

$$\mathbf{a} = [a_1 \quad a_2 \quad \cdots, \quad a_n]. \qquad \text{例如，} \qquad \mathbf{a} = [-2 \quad 5 \quad 0.8 \quad 0 \quad 1].$$

- 行向量為具有下列形式

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}. \qquad \text{例如，} \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ -7 \end{bmatrix}.$$

矩陣加法與純量乘法

■ 什麼造成矩陣與向量適合在電腦上使用且十分方便，此一事實使我們可以幾乎像使用數目字般容易來計算矩陣。的確，我們現在所介紹加法與純量乘法（與數字相乘）的法則係經由實際應用所建議出來的（矩陣與矩陣的相乘在下一節介紹）。我們首先需要相等的觀念。

定義 矩陣的相等

矩陣的相等

若且唯若兩矩陣 $\mathbf{A} = [a_{jk}]$ 與 $\mathbf{B} = [b_{jk}]$，具有相同大小且對應項**相等**（equal），亦即 $a_{11} = b_{11}$，$a_{12} = b_{12}$ 等，則此二矩陣為相等，並寫成 $\mathbf{A} = \mathbf{B}$。不相等的矩陣稱為**相異**（different）。如此，不同大小的矩陣恆為相異。

範例 3 矩陣的相等

- 令

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \quad 和 \quad \mathbf{B}=\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}.$$

$$\mathbf{A}=\mathbf{B} \quad 若且唯若 \quad \begin{matrix} a_{11}=4, & a_{12}=0, \\ a_{21}=3, & a_{22}=-1. \end{matrix}$$

- 下列矩陣均相異。說明之！

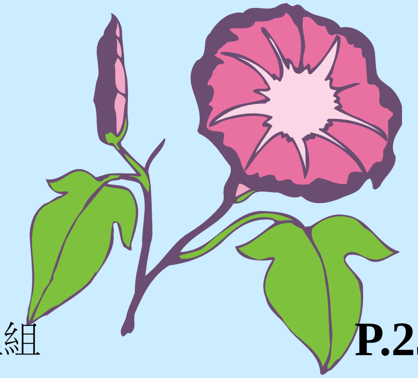
$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

定義

矩陣的加法

具有相同大小的兩矩陣 $\mathbf{A} = [a_{jk}]$ 和 $\mathbf{B} = [b_{jk}]$，相加之和寫為 $\mathbf{A} + \mathbf{B}$，且由 $\mathbf{A}$ 與 $\mathbf{B}$ 的對應項相加而成 $a_{jk} + b_{jk}$ 項。不同大小的矩陣不得相加。

- 就特例而言，兩個列向量或兩個行向量必須具有相同數目分量下，其和（sum）$\mathbf{a} + \mathbf{b}$ 由對應分量相加得到。



範例 4 矩陣與向量的加法

若 $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}-4 & 6 & 3\\ 0 & 1 & 2\end{bmatrix}$ 且 $\mathbf{B}=\begin{bmatrix}5 & -1 & 0\\ 3 & 1 & 0\end{bmatrix}$,

則 $\mathbf{A}+\mathbf{B}=\begin{bmatrix}1 & 5 & 3\\ 3 & 2 & 2\end{bmatrix}$.

- 範例 3 的 A 與本例 A 不能相加。若 $\mathbf{a}=[5\ \ 7\ \ 2]$ 且 $\mathbf{b}=[6\ \ 2\ \ 0]$，則 $\mathbf{a}+\mathbf{b}=[-1\ \ 9\ \ 2]$。

定義

純量乘法（與數字相乘）

任意 $m \times n$ 矩陣 $\mathbf{A} = [a_{jk}]$ 和**純量**（scalar）c（數字 c）的乘積記為 $c\mathbf{A}$，且仍為 $m \times n$ 矩陣，$c\mathbf{A} = [ca_{jk}]$ 係將 $\mathbf{A}$ 中每一項乘以 c 得到。

- 此處 $(-1)A$ 簡寫成 $-A$ 且稱為 A 的負矩陣（negative matrix）。同理，$(-k)A$ 寫成 $-kA$。另外 $A+(-B)$ 寫成 $A-B$，並稱為 A 與 B 的差（difference）（兩者應具有相同大小）。

範例 5　純量乘法

若 $\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 2.7 & -1.8 \\ 0 & 0.9 \\ 9.0 & -4.5 \end{bmatrix}$，則 $-\mathbf{A}=\begin{bmatrix} -2.7 & 1.8 \\ 0 & -0.9 \\ -9.0 & 4.5 \end{bmatrix}$，$\frac{10}{9}\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 1 \\ 10 & -5 \end{bmatrix}$，$0\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

若矩陣 B 表示某些城市間距離的英哩數，1.609B 則表示這些距離的公里數。

- **矩陣加法與純量乘法的定理** 從我們所熟悉數字加法的定律中，可獲得具有相同大小 $m \times n$ 的矩陣相加之類似定律，即

(2)

(a)	$\mathbf{A}+\mathbf{B}=\mathbf{B}+\mathbf{A}$	
(b)	$(\mathbf{A}+\mathbf{B})+\mathbf{C}=\mathbf{A}+(\mathbf{B}+\mathbf{C})$	（寫成 $\mathbf{A}+\mathbf{B}+\mathbf{C}$）
(c)	$\mathbf{A}+\mathbf{0}=\mathbf{A}$	
(d)	$\mathbf{A}+(-\mathbf{A})=\mathbf{0}.$	

範例 5 (續)

- 此處，**0** 代表**零矩陣**（zero matrix）（其大小為 $m \times n$），換句話說，亦即是所有項為零的 $m \times n$ 矩陣（範例 5 的最後一個矩陣即為零矩陣）。因此，矩陣加法具交換性與結合性 [(3a) 式和 (3b) 式所示]
- 同理，對於純量乘法，我們有下列定理

(4)

(a)	$c(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = c\mathbf{A} + c\mathbf{B}$	
(b)	$(c + k)\mathbf{A} = c\mathbf{A} + k\mathbf{A}$	
(c)	$c(k\mathbf{A}) = (ck)\mathbf{A}$	（寫成 $ck\mathbf{A}$）
(d)	$1\mathbf{A} = \mathbf{A}.$	