第 7 章 線性代數：矩陣，向量，行列式，線性方程組

定理 1 線性系統的基本定理

線性系統的基本定理

(a) **存在性** 對 n 個未知數 $x_1,\cdots,x_n$ 的 m 個線性方程組

$$
\begin{array}{ll}
 & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\
 & a \quad x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\
\textbf{(1)} & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
 & a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m
\end{array}
$$

定理 1 線性系統的基本定理

若且唯若係數矩陣 **A** 與擴大矩陣 $\tilde{\mathbf{A}}$ 具有相同的秩，則上述方程系統為相容的，即存在有解。此處，

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad 和 \quad \tilde{\mathbf{A}} = \left[\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$$

(b) **唯一解**　若且唯若具共通秩 r 的 **A** 與 $\tilde{\mathbf{A}}$ 等於 n，則系統(1) 恰有一組解。

(c) **無限組解**　若此一共通秩 r 小於 n，則此系統 (1) 具有無限多組解。所有這些解的求得方式為任意指定數值，給剩餘 $n - r$ 未知數來表示 r 個適宜的未知數（參見 6.3 節中範例 3）。

(d) **高斯消去法**（6.3 節）　若存在有解，則可藉高斯消去法求得這些解（此方法將自動透露是否有解；參見 6.3 節）。

定理 1 證明

- (a) 我們可將系統 (1) 寫成向量形式 $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ 或由 $\mathbf{A}$ 的行向量 $\mathbf{c}_{(1)}, \ldots, \mathbf{c}_{(n)}$ 來表示：

(2) $$\mathbf{c}_{(1)} x_1 + \mathbf{c}_{(2)} x_2 + \cdots + \mathbf{c}_{(n)} x_n = \mathbf{b}.$$

係由 $\tilde{\mathbf{A}}$ 加上單行 $\mathbf{b}$ 擴大而得。因此，根據 6.4 節定理 3，rank $\tilde{\mathbf{A}}$ 等於 rank A 或 rank $\mathbf{A}+1$。現在若 (1) 式有一解 $\mathbf{x}$，則由 (2) 式顯示 $\mathbf{b}$ 必為這些行向量的線性組合，如此，$\tilde{\mathbf{A}}$ 與 $\mathbf{A}$ 具有相同的線性獨立行向量的最大數目，故其秩也相同。

- 反過來說，若 rank $\tilde{\mathbf{A}}$ = rank $\mathbf{A}$，則 $\mathbf{b}$ 必為 $\mathbf{A}$ 的行向量的線性組合，例如

(2*) $$\mathbf{b} = \alpha_1 \mathbf{c}_{(1)} + \cdots + \alpha_n \mathbf{c}_{(n)}$$

定理 1 證明

否則 rank $\tilde{\mathbf{A}}=$ rank $\mathbf{A}+1$。但是 (2*) 式意表 (1) 式有一解，即 $x_1=\alpha_1, \cdots, x_n=\alpha_n$，此可由比較 (2*) 式與 (2) 式看出。

的線性獨立行向量的最大數目，故其秩也相同。

- (b) 若 rank $\mathbf{A}=n$，則根據 6.4 節定理 3 知 (2) 式的 n 個行向量為線性獨立。那麼我們可稱說 **b** 的 (2) 式為唯一表示。原因是：

$$\mathbf{c}_{(1)} x_1+\cdots+\mathbf{c}_{(n)} x_n=\mathbf{c}_{(1)} \tilde{x}_1+\cdots+\mathbf{c}_{(n)} \tilde{x}_n .$$

- 此暗示（將所有項移至左邊加上一負號）

$$(x_1-\tilde{x}_1)\mathbf{c}_{(1)}+\cdots+(x_n-\tilde{x}_n)\mathbf{c}_{(n)}=\mathbf{0}$$

定理 1 證明

以及根據線性獨立知 $x_1 - \tilde{x}_1 = 0, \cdots, x_n - \tilde{x}_n = 0$。不過此意味著 (2) 式的純量 $x_1, \cdots, x_n$ 可定出唯一值。亦即，(1) 式的解為唯一解。

- (c)若rank $\tilde{\mathbf{A}}$ = rank $\mathbf{A} = r < n$，則根據 6.4 節定理 3 知，有一由 $\mathbf{A}$ 中 r 個行向量構成的線性獨立集合 K，使得 $\mathbf{A}$ 中的其他 $n - r$ 個行向量為這些向量的線性組合。將行和未知數重新編號，而以 ^ 表重新編號的量，即使得 $\{\hat{\mathbf{c}}_{(1)}, \cdots, \hat{\mathbf{c}}_{(n)}\}$ 為線性獨立集合 K，於是 (2) 式變成

$$\hat{\mathbf{c}}_{(1)}\hat{x}_1 + \cdots + \hat{\mathbf{c}}_{(r)}\hat{x}_r + \hat{\mathbf{c}}_{(r+1)}\hat{x}_{r+1} + \cdots + \hat{\mathbf{c}}_{(n)}\hat{x}_n = \mathbf{b},$$

- $\hat{\mathbf{c}}_{(r+1)}, \cdots, \hat{\mathbf{c}}_{(n)}$ 為 K 的向量之線性組合，$\hat{x}_{(r+1)}\hat{\mathbf{c}}_{(r+1)}, \cdots, x_n\hat{\mathbf{c}}_{(n)}$

定理 1 證明

也是。以 K 的向量來表示這些向量，並整理這些項，於是可將以上系統寫成

(3) $$\hat{\mathbf{c}}_{(1)}y_1 + \cdots + \hat{\mathbf{c}}_{(r)}y_r = \mathbf{b}$$

- 其中 $y_i = \hat{x}_j + \beta_j$，而 β_j 得自 $n-r$ 項中 $\hat{\mathbf{c}}_{(r+1)}\hat{x}_{(r+1)}, \cdots, \hat{\mathbf{c}}_{(n)}\hat{x}_n$；式中 $j = 1, \cdots, r$。
- (d) 此已在 6.3 節論述過，此處當作備忘。

齊次線性系統

- 由 6.3 節知，若所有 b_j 都為零，則稱線性系統 (1) 為**齊次**（homogeneous）；而若至少有一 b_j 不是零，則屬**非齊次**（nonhomogeneous）。我們由基本定理，得到下列齊次系統的結果。

定理 2 齊次線性系統

(4)
$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= 0 \end{aligned}$$

恆存有**平凡解**（trivial solution）$x_1=0, \ldots, x_n=0$。若且唯若 rank **A**$<n$，則存在非平凡解。當 rank **A**$=r<n$ 時，這些非平凡解以及 $\mathbf{x}=\mathbf{0}$（平凡解）構成 $n-r$ 維的向量空間（見6.4節），稱為(4)式的**解空間**（solution space）。

■ 特例，若 $\mathbf{x}_{(1)}$ 與 $\mathbf{x}_{(2)}$ 為(4)式的解向量，則 $\mathbf{x}=c_1\mathbf{x}_{(1)}+c_2\mathbf{x}_{(2)}$ 恆為(4)式的解向量，其中 c_1 與 c_2 為任意純量（此點在非齊次系統並不成立，同時，解空間只適用在齊次系統）。

定理 2 證明

- 第一個論點可從系統直接看出。此點又符合 $\mathbf{b} = \mathbf{0}$，意指 rank $\tilde{\mathbf{A}}$ = rank $\mathbf{A}$ 的事實，以致齊次系統恆為相容。若 rank $\mathbf{A} = n$，則依照定理 1 的 (b) 知平凡解為唯一解。若 rank $\mathbf{A} < n$，則根據定理 1 的 (c) 得非平凡解。

- 這些解構成向量空間，因若 $\mathbf{x}_{(1)}$ 與 $\mathbf{x}_{(2)}$ 為任意其中向量，則 $\mathbf{A}\mathbf{x}_{(1)} = 0$, $\mathbf{A}\mathbf{x}_{(2)} = 0$，則此點暗示 $\mathbf{A}(\mathbf{x}_{(1)} + \mathbf{x}_{(2)}) = \mathbf{A}\mathbf{x}_{(1)} + \mathbf{A}\mathbf{x}(_{2)} = 0$，以及 $\mathbf{A}(c\mathbf{x}_{(1)}) = c\mathbf{A}\mathbf{x}_{(1)} = 0$，其中 c 為任意數。

- 若 rank $\mathbf{A} = r < n$，定理 1 (c) 暗示我們可選取 $n-r$ 適當的未知數，通稱為 $x_{r+1},\ldots, x_n$，再依此種方式求得每一解。因此，解空間的基底，簡稱 (4) 式的解**基底**（basis of solutions），為 $y_{(1)},\ldots, y_{(n-r)}$，其中基底向量 $\mathbf{y}_{(j)}$ 係藉選定 $\mathbf{x}_{r+j} = 1$

定理 2 證明

與其他 $x_{r+1},\ldots,x_n$ 為零求得；如此解得此解向量的對應前 r 個分量。因此 (4) 式的解空間為 $n-r$ 維。證得定理 2。

- (4) 式的解空間亦稱為 **A** 的零核空間，此因 (4) 式的解空間的每一 **x** 均成立 $\mathbf{Ax}=\mathbf{0}$，其維度稱為 **A** 的核維數。所以定理 2 陳述為

(5) $\boxed{\text{rank } \mathbf{A} + \mathbf{A} \text{ 的核維數} = n}$

其中，n 為未知數的個數（A 的行數）。

- 再者，根據秩的定義得 (4) 式的 rank $\mathbf{A} \leq m$。因此，若 $m < n$，則 rank $\mathbf{A} < n$。定理 2 的此點在實務上頗為重要。

定理 3 方程式少於未知數的齊次線系統

方程式少於未知數的齊次線系統

方程式數目少於未知數的系統恆存在非零解。

非齊次線性系統

- 接下來是相當簡單的線性系統 (1) 式的所有解特性。

定理 4 非齊次線性系統

非齊次線性系統

若非齊次線性系統 (1) 式為相容，則其所有解的形式為

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \mathbf{x}_h \tag{6}$$

其中，$\mathbf{x}_0$ 為 (1) 式中任意（固定的）解，而 $\mathbf{x}_h$ 為滿足對應的齊次系統 (4) 式的所有解。

定理 4 證明

- (1) 式中任兩個解的差 $\mathbf{x}_h = \mathbf{x} - \mathbf{x}_0$ 為 (4) 式的解，此因為 $\mathbf{A}\mathbf{x}_h = \mathbf{A}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) = \mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{A}\mathbf{x}_0 = \mathbf{b} - \mathbf{b} = 0$。既然 $\mathbf{x}$ 為 (1) 式之任意解，若在 (6) 式取 (1) 式的任意解 $\mathbf{x}_0$，且以 $\mathbf{x}_h$ 變動 (4) 式的所有解空間，則得到 (1) 的所有解。