第 7 章 線性代數：矩陣，向量，行列式，線性方程組

7.1 矩陣，向量：加法與純量乘積

7.2 矩陣乘法

7.3 線性方程組，高斯消去法

7.4 線性獨立，矩陣的秩，向量空間

7.5 線性系統的解： 存在性，唯一性

7.6 參考用： 二階與三階行列式

7.7 行列式，柯拉瑪法則

7.8 反矩陣，高斯—喬丹消去法

7.9 向量空間，內積空間，線性轉換（選讀）

二階行列式

- **二階行列式**（determinant of second order）以如下符號定義：

(1)
$$D = \det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

故此處採用直立線（而矩陣則使用括號）。

柯拉瑪法則

■ **柯拉瑪法則**（Cramer's rule）求解以兩個未知數表示的兩個線性方程式

(2)
$$\begin{aligned}
&\text{(a)} \quad a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\
&\text{(b)} \quad a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2
\end{aligned}$$

得

(3)
$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{D} = \frac{b_1 a_{22} - a_{12} b_2}{D} \qquad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{D} = \frac{a_{11} b_2 - b_1 a_{21}}{D}.$$

其中 (1) 式的 D 滿足

$$D \neq 0.$$

■ $D = 0$ 情況出現在矛盾非齊次系統方程以及具非平凡解的齊次系統方程。

證明

■ 底下證明 (3) 式。欲消掉 x_2，可將(2a) 式乘 a_{22} 與 (2b) 式乘以 $-a_{12}$，然後相加

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22} - a_{12}b_2.$$

■ 同理，為消掉 x_1，可將(2a) 式乘 $-a_{12}$ 與 (2b) 式乘以 a_{11}，再加起來

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = a_{11}b_2 - b_1a_{21}.$$

■ 假定 $D = a_{11}\,a_{22} - a_{12}\,a_{21} \neq 0$，將上二式右邊以行列式形式除之得到 (3) 式。

範例 1 柯拉瑪法則求解兩方程式

若 $\begin{aligned} 4x_1 + 3x_2 &= 12 \\ 2x_1 + 5x_2 &= -8 \end{aligned}$ 則 $x_1 = \dfrac{\begin{vmatrix} 12 & 3 \\ -8 & 5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}} = \dfrac{84}{14} = 6,$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 12 \\ 2 & -8 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}} = \frac{-56}{14} = -4.$$

三階行列式

- **三階行列式**（determinant of third order）可定義為

$$(4)\quad D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}.$$

注意：右邊的符號為 ＋ － ＋。右邊的三項各為 D 的第一行的項乘上其**子式**（minor）而得，子式由 D 刪掉該項所在的列與行所成二階行列式，如此，對 a_{11}而言，即刪掉第一列與第一行等。

- 若再算 (4) 式中子式則得

$$(4^*)\quad \begin{aligned} D = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} + a_{21}a_{13}a_{32} \\ - a_{21}a_{12}a_{33} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{31}a_{13}a_{22}. \end{aligned}$$

柯拉瑪法則求解三個方程式的線性系統

- 柯拉瑪法則求解三個方程式的線性系統

(5)
$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= b_3 \end{aligned}$$

得

(6)
$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \qquad x_2 = \frac{D_2}{D}, \qquad x_3 = \frac{D_3}{D} \qquad (D \neq 0)$$

- 其中 D 為 (4) 式系統的行列式，以及

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \quad D_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

- 注意 D_1、D_2、D_3 分別由 (5) 式右邊的行取代 D 中第 1、2、3 行。
- 類似於 (3) 式求解，我們也可藉消去法導出柯拉瑪公式(6)，但是在下一節，我們要討論一般情況（定理 4）。