# 第 8-4 章

# 線性微分方程組

AB5-6B 對角化與微分方程組--
https://www.youtube.com/watch?v=s187EWR0sQQ

# 9-1 一階線性微分方程組的理論

若有 $n$ 個未知函數滿足

$$
\begin{aligned}
x_1'(t) &= a_{11}(t)x_1(t) + a_{12}(t)x_2(t) + \cdots + a_{1n}(t)x_n(t) + g_1(t) \\
x_2'(t) &= a_{21}(t)x_1(t) + a_{22}(t)x_2(t) + \cdots + a_{2n}(t)x_n(t) + g_2(t) \\
&\vdots \\
x_n'(t) &= a_{n1}(t)x_1(t) + a_{n2}(t)x_2(t) + \cdots + a_{nn}(t)x_n(t) + g_n(t)
\end{aligned}
$$

對 $t$ 微分

設 $X(t)=\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$，$G(t)=\begin{pmatrix} g_1(t) \\ g_2(t) \\ \vdots \\ g_n(t) \end{pmatrix}$

$$A(t)=\begin{bmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \cdots & a_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{bmatrix}$$

且微分一矩陣即微分其每一元素，所以

$$X'(t) = \begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \\ \vdots \\ x_n'(t) \end{pmatrix}$$

於是原微分方程組可表示為

$$X'(t) = A(t)X(t) + G(t)$$

或簡寫成

$$X' = AX + G \qquad (2.1)$$

若對所有$t$值，$G(t)=O$，則此方程組為齊次，且可表為

$$X' = AX \qquad (2.2)$$

而$O$代表n×1階零矩陣，即

$$O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

先討論<u>齊次方程組</u>的以下重要性質：

| |
|---|
| 若$\Phi_1, \cdots, \Phi_k$ 為 $X' = AX$ 的解，令 $c_1, \cdots, c_k$ 為任意實數，則線性組合 $c_1\Phi_1 + \cdots + c_k\Phi_k$ 亦為 $X' = AX$ 之解。 |

［證明］ $$\begin{aligned}(c_1\Phi_1 + \cdots + c_k\Phi_k)' &= c_1\Phi_1' + \cdots + c_k\Phi_k' \\ &= c_1 A\Phi_1 + \cdots + c_k A\Phi_k \\ &= A(c_1\Phi_1 + \cdots + c_k\Phi_k)\end{aligned}$$

再介紹<u>線性相依</u>與<u>線性獨立</u>：

## 線性相依 ( linear dependence)

若$\Phi_1, \cdots, \Phi_k$ 為 $X' = AX$ 的解，但其中有一解可為其他解的線性 組合，則稱這些解為線性相依。

例如，假設 $\Phi_1$可等於其他解的某一線 性組合，

$$\Phi_1 = a_2\Phi_2 + \cdots + a_k\Phi_k$$

則 $c_1\Phi_1 + \cdots + c_k\Phi_k$

$$= c_1(a_2\Phi_2 + \cdots + a_k\Phi_k) + c_2\Phi_2 + \cdots + c_k\Phi_k$$

$$= (c_1a_2 + c_2)\Phi_2 + (c_1a_3 + c_3)\Phi_3 \cdots + (c_1a_k + c_k)\Phi_k$$

即在這種情況下， $\Phi_1, \Phi_2, \cdots, \Phi_k$ 的線 性組合其實僅是$\Phi_2, \cdots, \Phi_k$ 的線 性組合而已，而 $\Phi_1$是多餘的。

## 線性獨立 ( linear independence)

若$\Phi_1, \cdots, \Phi_k$ 為 $X' = AX$ 的解，且無任一解可為其他解的線性 組合，則稱這些解為線性獨立。

# 基本矩陣 ( fundamental matrix)

若$\Phi_1, \cdots, \Phi_n$ 為 $X' = AX$ 的 $n$ 個解，
且這些解為線性獨立，則矩陣

$$\Omega = [\Phi_1, \Phi_2, \cdots, \Phi_n]$$

為方程組 $X' = AX$ 的基本矩陣。

利用此基本矩陣，則方程組

$$X' = AX$$

的一般解可表示為

$$X(t) = \Omega(t)C \qquad (2.3)$$

上式中

$$c_1\Phi_1 + c_2\Phi_2 + \cdots + c_n\Phi_n$$

$$C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$$ 為任意常數所組成的 n×1矩陣

## **9-2** 當$A$為常數矩陣時，$X' = AX$ 的解

$$X' = AX$$

嘗試令 $X=he^{\lambda t}$，其中$h$為一待決定的n×1階常數矩陣，$\lambda$為一待決定的特定數。

將此建議解代入原方程式中，可得

$$(he^{\lambda t})' = h\lambda e^{\lambda t} = A(he^{\lambda t})$$

$$\Rightarrow (\lambda h - Ah)e^{\lambda t} = \boldsymbol{O}$$

$$(\lambda h - Ah)e^{\lambda t} = \mathbf{0}$$

因為 $e^{\lambda t}$ 一定不等於零，所以

$$\lambda h - Ah = \mathbf{0}$$

$$\lambda h = Ah$$

$\Rightarrow$ $\lambda$ 必為 $A$ 的特徵值

$h$ 為 $\lambda$ 所對應的特徵向量

因此，如果能找到 n 個線性獨立的特徵向量，以形成 n 個線性獨立解，即可求得所要的解。

[例題1] 求以下微分方程組的通解

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

[解] $$\begin{vmatrix} \lambda - 4 & -2 \\ -3 & \lambda - 3 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \lambda^2 - 7\lambda + 6 = 0,\ \ \lambda = 1, 6$$

$$\lambda_1 = 1: \begin{bmatrix} 1-4 & -2 \\ -3 & 1-3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow -3a_1 - 2a_2 = 0$$

可選擇 $a_1 = 2,\ a_2 = -3 \Rightarrow h_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}$

$$\lambda_2 = 6: \begin{bmatrix} 6-4 & -2 \\ -3 & 6-3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow 2a_1 - 2a_2 = 0$$

可選擇 $a_1 = 1,\ a_2 = 1 \Rightarrow h_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$\therefore\ \Phi_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix} e^t = \begin{bmatrix} 2e^t \\ -3e^t \end{bmatrix},\ \Phi_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{6t} = \begin{bmatrix} e^{6t} \\ e^{6t} \end{bmatrix}$$

因此基本矩陣為

$$\Omega = [\Phi_1 \quad \Phi_2] = \begin{bmatrix} 2e^t & e^{6t} \\ -3e^t & e^{6t} \end{bmatrix}$$

故通解為

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \Omega C = \begin{bmatrix} 2e^t & e^{6t} \\ -3e^t & e^{6t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2c_1e^t + c_2e^{6t} \\ -3c_1e^t + c_2e^{6t} \end{bmatrix}$$

或以分量表示為

$$x_1(t) = 2c_1e^t + c_2e^{6t}$$

$$x_2(t) = -3c_1e^t + c_2e^{6t}$$

## [習題1] 求以下微分方程組的通解

$$X' = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} X$$

答案：$\begin{bmatrix} c_1 e^{3t} + c_2 e^{-t} \\ c_1 e^{3t} \end{bmatrix}$

## [習題2] 求以下微分方程組的通解

$$X' = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} X$$

答案：$\begin{bmatrix} 2c_1 e^{5t} + c_2 \\ -c_1 e^{5t} + 2c_2 \end{bmatrix}$

[例題2] 求以下微分方程組的通解

$$X' = AX，其中 A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

[解] $$\begin{vmatrix} \lambda - 2 & 0 & -1 \\ 0 & \lambda + 2 & 2 \\ 0 & -2 & \lambda - 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$(\lambda - 2)(\lambda^2 + 2\lambda + 4) = 0$$

$$\lambda = 2,\ -1 + i\sqrt{3},\ -1 - i\sqrt{3}$$

$$\lambda_1 = 2: \begin{bmatrix} 2-2 & 0 & -1 \\ 0 & 2+2 & 2 \\ 0 & -2 & 2-0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} -a_3 = 0 \\ 4a_2 + 2a_3 = 0 \end{cases}$$

$$a_3 = 0, a_2 = 0, \text{ 另選擇 } a_1 = 1 \quad \Rightarrow \Phi_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} e^{2t}$$

$\lambda_2 = -1 + i\sqrt{3}$ :

$$\begin{bmatrix} (-1+i\sqrt{3})-2 & 0 & -1 \\ 0 & (-1+i\sqrt{3})+2 & 2 \\ 0 & -2 & (-1+i\sqrt{3})-0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} (-3+i\sqrt{3})a_1 - a_3 = 0 \\ (1+i\sqrt{3})a_2 + 2a_3 = 0 \end{cases}$$

選擇 $a_1 = 1 \Rightarrow a_3 = -3 + i\sqrt{3}, a_2 = -i2\sqrt{3}$

$$\phi_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -i2\sqrt{3} \\ -3+i\sqrt{3} \end{bmatrix} e^{(-1+i\sqrt{3})t} \Rightarrow \phi_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ i2\sqrt{3} \\ -3-i\sqrt{3} \end{bmatrix} e^{(-1-i\sqrt{3})t}$$

$$由於\begin{bmatrix} 1 \\ -i2\sqrt{3} \\ -3+i\sqrt{3} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix}+i\begin{bmatrix} 0 \\ -2\sqrt{3} \\ \sqrt{3} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \ \mathrm{U}=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix}, \quad V=\begin{bmatrix} 0 \\ -2\sqrt{3} \\ \sqrt{3} \end{bmatrix}$$

$$\therefore \begin{bmatrix} \Phi_2 \\ \Phi_3 \end{bmatrix} = e^{\alpha t} \begin{bmatrix} \cos\beta t & -\sin\beta t \\ \sin\beta t & \cos\beta t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U \\ V \end{bmatrix}$$

$$\Phi_2 = e^{-t}(U\cos\sqrt{3}t - V\sin\sqrt{3}t) = e^{-t}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix}\cos\sqrt{3}t - \begin{bmatrix} 0 \\ -2\sqrt{3} \\ \sqrt{3} \end{bmatrix}\sin\sqrt{3}t\right)$$

$$= e^{-t}\begin{bmatrix} \cos\sqrt{3}t \\ 2\sqrt{3}\sin\sqrt{3}t \\ -3\cos\sqrt{3} - \sqrt{3}\sin\sqrt{3}t \end{bmatrix}$$

$$\Phi_3 = e^{-t}(U\sin\sqrt{3}t + V\cos\sqrt{3}t) = e^{-t}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix}\sin\sqrt{3}t + \begin{bmatrix} 0 \\ -2\sqrt{3} \\ \sqrt{3} \end{bmatrix}\cos\sqrt{3}t\right)$$

$$= e^{-t}\begin{bmatrix} \sin\sqrt{3}t \\ -2\sqrt{3}\cos\sqrt{3}t \\ -3\sin\sqrt{3}t + \sqrt{3}\cos\sqrt{3}t \end{bmatrix}$$

通解 $X = c_1\Phi_1 + c_2\Phi_2 + c_3\Phi_3$

$$= c_1\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}e^{2t} + c_2e^{-t}\begin{bmatrix}\cos\sqrt{3}t\\ 2\sqrt{3}\sin\sqrt{3}t\\ -3\cos\sqrt{3} - \sqrt{3}\sin\sqrt{3}t\end{bmatrix} + c_3e^{-t}\begin{bmatrix}\sin\sqrt{3}t\\ -2\sqrt{3}\cos\sqrt{3}t\\ -3\sin\sqrt{3}t + \sqrt{3}\cos\sqrt{3}t\end{bmatrix}$$

$$x_1(t) = c_1e^{2t} + c_2e^{-t}\cos\sqrt{3}t + c_3e^{-t}\sin\sqrt{3}t$$

$$x_2(t) = \quad 2\sqrt{3}c_2e^{-t}\sin\sqrt{3}t - 2\sqrt{3}c_3e^{-t}\cos\sqrt{3}t$$

$$x_3(t) = \quad c_2e^{-t}(-3\cos\sqrt{3}t - \sqrt{3}\sin\sqrt{3}t)$$

$$+ c_3e^{-t}(-3\sin\sqrt{3}t + \sqrt{3}\cos\sqrt{3}t)$$

[習題1] 求以下微分方程組的通解

$$X' = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} X$$

[習題2] 求以下微分方程組的通解

$$X' = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} X$$

## **9-2-2** 利用對角化$A$，求 $X' = AX$ 的解

方程組

$$X' = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{bmatrix} X$$

由於$A$為一對角矩陣，此方程組可簡化成三個獨立的微分方程式

$$x_1' = -2x_1$$
$$x_2' = 4x_2$$
$$x_3' = -6x_3$$

而每一獨立的微分方程式可容易解得

$$x_1 = c_1 e^{-2t}$$
$$x_2 = c_2 e^{4t}$$
$$x_3 = c_3 e^{-6t}$$

$$\boxed{\begin{aligned} x_1' &= -2x_1 \\ x_2' &= 4x_2 \\ x_3' &= -6x_3 \end{aligned}}$$

由此可知，若方程組 $X' = AX$ 中 $A$ 為對角矩陣，則可使方程組易於求解。

> 若 $A$ 原為非對角矩陣，則只要 $A$ 有n個線性獨立的特徵向量，也可使 $A$ 經轉換後，變成另一對角矩陣。

假設 $n \times n$ 矩陣 $A$ 的有n個獨立的特徵向量 $h_1, h_2, \ldots, h_n$，其對應的特徵值分別為 $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$。

令 $n \times n$ 矩陣 $P$ 的 n 個行是由矩陣$A$的n個特徵向量所組成，即

$$P = \left[h_1, h_2, \cdots, h_n\right]$$

則 $A[h_1, h_2, \cdots, h_n] = [\lambda_1 h_1, \lambda_2 h_2, \cdots, \lambda_n h_n]$

$$= [h_1, h_2, \ldots, h_n] \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

或簡寫成 $AP = PD$

$$\Rightarrow P^{-1}AP = D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

解方程組 $X' = AX$ 時，先做變數轉換

$X = PZ$，再代入原方程組可得

$$PZ' = APZ$$

$$Z' = P^{-1}APZ = DZ$$

而 $Z' = DZ$ 的基本矩陣為

$$\Omega_D(t) = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}$$

通解為 $Z(t)=\Omega_D(t)C$

而原方程組的通解為

$$X(t)=PZ(t)=P\Omega_D(t)C$$

即原方程組的基本矩陣為

$$\Omega(t)=P\Omega_D(t)$$

注意在此過程中，不須去計算$P^{-1}$，只須用到$P$及$\Omega_D$即可。

[例題3] 利用對角化方法求微分方程組的通解

$$X' = AX，其中 A = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$$

[解] $A$的特徵值與特徵向量為

$$2, \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix} 與 6, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow P = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}，\Omega_{\mathrm{D}} = \begin{bmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{6t} \end{bmatrix}$$

$$P=\begin{bmatrix}-3 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}，\Omega_{\mathrm{D}}=\begin{bmatrix}e^{2t} & 0\\ 0 & e^{6t}\end{bmatrix}$$

$$\Omega(t)=P\Omega_D(t)=\begin{bmatrix}-3 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}e^{2t} & 0\\ 0 & e^{6t}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3e^{2t} & e^{6t}\\ e^{2t} & e^{6t}\end{bmatrix}$$

故通解為

$$X(t)=\Omega(t)C=\begin{bmatrix}-3e^{2t} & e^{6t}\\ e^{2t} & e^{6t}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c_1\\ c_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3c_1e^{2t}+c_2e^{6t}\\ c_1e^{2t}+c_2e^{6t}\end{bmatrix}$$

[習題1] 利用對角化方法求微分方程組的通解

$$X' = AX，其中 A = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}$$

[習題2] 利用對角化方法求微分方程組的通解

$$X' = AX，其中 A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

## 9-3 $X' = AX + G$ 的解

| |
|---|
| 定理：設 $\Omega$ 為 $X' = AX$ 的一個基本矩陣，而 $\Psi$ 為 $X' = AX + G$ 的任一解(特解)，則 $X' = AX + G$ 的一般解為 $\Omega C + \Psi$，其中 $C$ 為 $n \times 1$ 階的任意常數矩陣。 |

以上定理與常微分方程式的解頗相似，即<u>非齊次方程組的一般解為齊次解與任一特解之和</u>。

$$X_h = \Omega C$$ → 齊次解

$$X_p = \Psi$$ → 特解

$$X = X_h + X_p$$ → 一般解(或稱通解)

求特解的方法可用<u>參數變化法</u>或<u>對角化矩陣法</u>

## 9-3-2 利用對角化$A$，求 $X' = AX + G$的解

令 n×n 矩陣 $P$ 的 n 個行是由矩陣$A$的n個特徵向量所組成，即

$$P = \left[ h_1, h_2, \cdots, h_n \right]$$

則 $$P^{-1}AP = D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

其中 $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ 為 $A$ 的n個特徵值。

解方程組 $X' = AX + G$ 時，先做變數轉換

$X = PZ$，可得

$$X' = PZ' = A(PZ) + G$$

$$PZ' = (AP)Z + G$$

$$Z' = (P^{-1}AP)Z + P^{-1}G = DZ + P^{-1}G$$

令 $$P^{-1}G = \begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} z_1' \\ z_2' \\ \vdots \\ z_n' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{bmatrix}$$

因此可得一非耦合方程組，而可寫成

$$\begin{gathered} z_1' = \lambda_1 z_1 + f_1(t) \\ z_2' = \lambda_2 z_2 + f_2(t) \\ \vdots \\ z_n' = \lambda_n z_n + f_n(t) \end{gathered}$$

獨立解此n個一階微分方程式，再經變數轉換 $X=PZ$，即可得解。

[例題5] 試解方程組

$$X' = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} 8 \\ 4e^{3t} \end{bmatrix}$$

[解] 特徵值 $\lambda_1 = 2$，特徵向量 $h_1 = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix}$

特徵值 $\lambda_2 = 6$，特徵向量 $h_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$P = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}，\quad P^{-1}AP = D = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$$

$$P=\begin{bmatrix}-3 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix} \Rightarrow P^{-1}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{4} & \frac{1}{4}\\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4}\end{bmatrix}$$

$$Z'=DZ+P^{-1}G=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 6\end{bmatrix}Z+\begin{bmatrix}-\frac{1}{4} & \frac{1}{4}\\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}8\\ 4e^{3t}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 6\end{bmatrix}Z+\begin{bmatrix}-2+e^{3t}\\ 2+3e^{3t}\end{bmatrix}$$

$$Z' = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} Z + \begin{bmatrix} -2 + e^{3t} \\ 2 + 3e^{3t} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} z_1' = 2z_1 - 2 + e^{3t} \\ z_2' = 6z_2 + 2 + 3e^{3t} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z_1' - 2z_1 = -2 + e^{3t} \\ z_2' - 6z_2 = 2 + 3e^{3t} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} z_1 = c_1 e^{2t} + e^{2t} \int e^{-2t} ( -2 + e^{3t} ) dt \\ z_2 = c_2 e^{6t} + e^{6t} \int e^{-6t} (2 + 3e^{3t}) dt \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} z_1 = c_1 e^{2t} + e^{3t} + 1 \\ z_2 = c_2 e^{6t} - e^{3t} - \dfrac{1}{3} \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = PZ = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 e^{2t} + e^{3t} + 1 \\ c_2 e^{6t} - e^{3t} - \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -3c_1 e^{2t} + c_2 e^{6t} - 4e^{3t} - \frac{10}{3} \\ c_1 e^{2t} + c_2 e^{6t} + \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

從上式也可看出

基本矩陣$\Omega = \begin{bmatrix} -3e^{2t} & e^{6t} \\ e^{2t} & e^{6t} \end{bmatrix}$，特解$\Psi_p(t) = \begin{bmatrix} -4e^{3t} - \frac{10}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix}$

[習題1] 利用對角化 $A$ ，試解方程組

$$X' = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -4 & 3 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} 0 \\ 10\cos(t) \end{bmatrix}$$

[習題2] 利用對角化 $A$ ，試解方程組

$$X' = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 9 & -3 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} 3e^{2t} \\ e^{2t} \end{bmatrix}$$