第 9 章 向量微分，梯度，散度，旋度

向量

■ 向量（以箭號表示）其尾巴，稱為**起點**（initial point），而頭稱為**終點**（terminal point）。此記號是源自圖138，三角形的**平移**（translation）（沒有旋轉的位移）觀念，其中向量 **a** 的起點 P 是此點的起始位置，而終點 Q 則是那點的終端位置，即平移後的位置。此箭號的長度等於 P 與 Q 兩點間的距離，即稱為向量 **a** 的長度（或大小），並記為 $|\mathbf{a}|$。**長度**（length）又叫**範數**（norm）（或歐幾里得範數），長度為 1 的向量稱為**單位向量**（unit vector）。

■ 當然，我們喜歡以向量計算，例如，我們要計算諸力的合力或比較不同大小的平行力。此引起我們另外想到：定義向量的分量，然後是**向量加法**（vector addition）以及**純量乘法**（scalar multiplication）的兩個基本代數運算。

■ 為此，我們首先必須定義**向量的相等**（equality of vectors），使得向量在力學與其它應用上產生實用性關聯。

圖137 力與速度

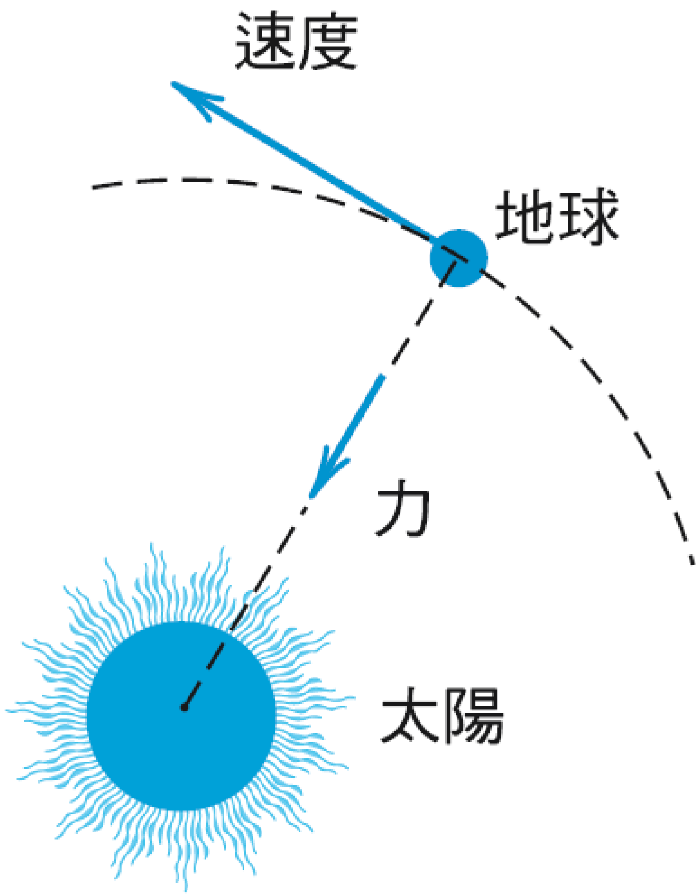

圖 137　力與速度

圖138 平移

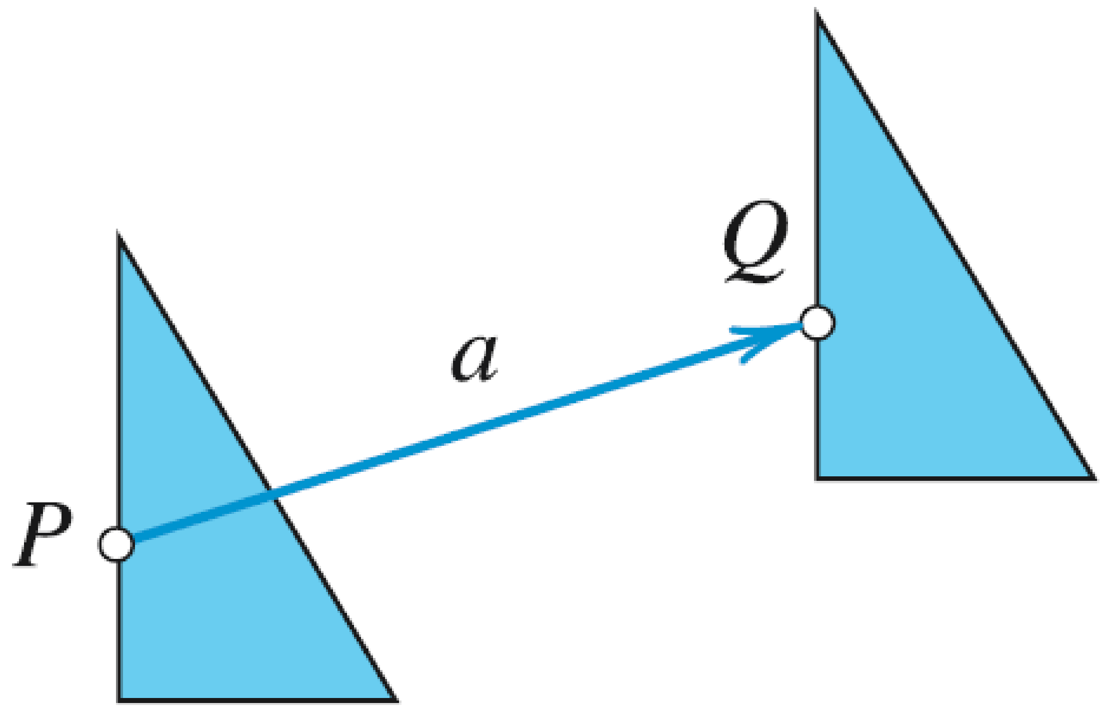

圖 138 平移

定義 向量的相等

向量的相等

若兩向量 **a**、**b** 有相同長度與方向，則此兩向量相等，寫成 **a** = **b** [如圖 139 所說明，尤其 (B) 部分]。因此向量可任意平移，亦即起點可任意選定。

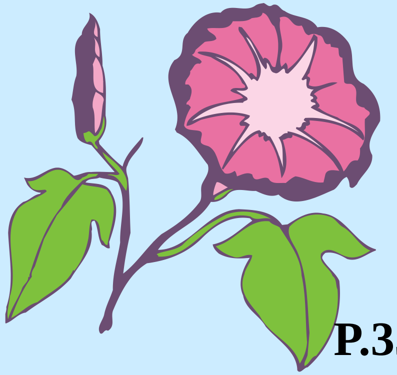

圖139

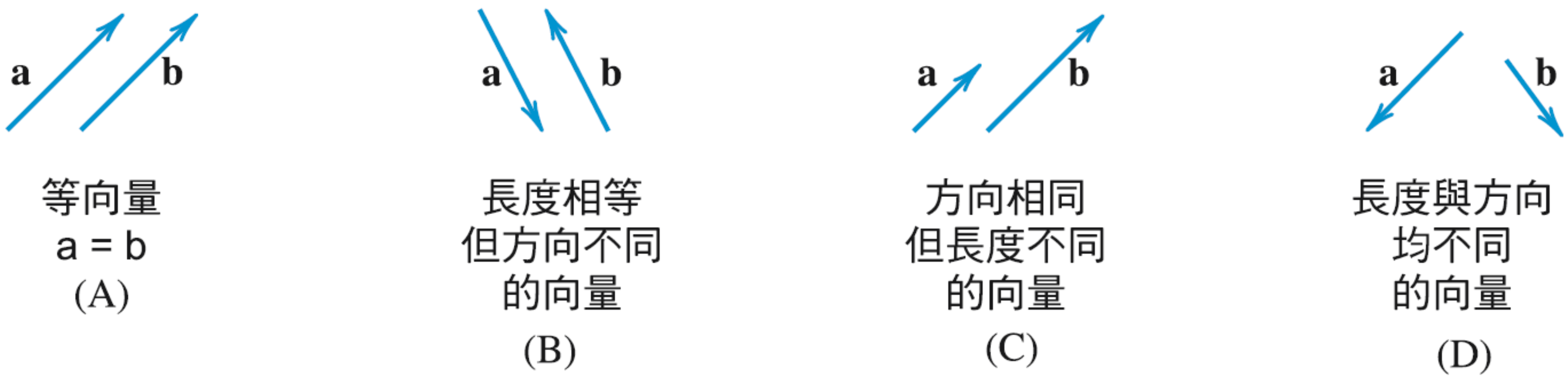

圖 139　(A) 等向量，(B)–(D) 互異向量

向量的分量

■ 我們選取空間的 *xyz* **笛卡兒座標系**（Cartesian coordinate system）（圖140），即一般具有等刻度量度的三個互相垂直座標軸的直角座標系。令 **a** 為起點 $P:(x_1,y_1, z_1)$ 與終點 $Q:(x_2, y_2, z_2)$ 的已知向量，因而此三座標差

(1) $$a_1 = x_2 - x_1, \qquad a_2 = y_2 - y_1, \qquad a_3 = z_2 - z_1$$

■ 稱為向量 **a** 對座標系的**分量**（components），且可簡寫為 $\mathbf{a} = [a_1, a_2, a_3]$，見圖141。

■ 那麼 **a** 的長度□**a**□可隨即表成分量形式，此因為根據 (1) 式與畢式定理得知

(2) $$|\mathbf{a}| = \sqrt{a_1{}^2 + a_2{}^2 + a_3{}^2}.$$

圖140 笛卡兒座標系

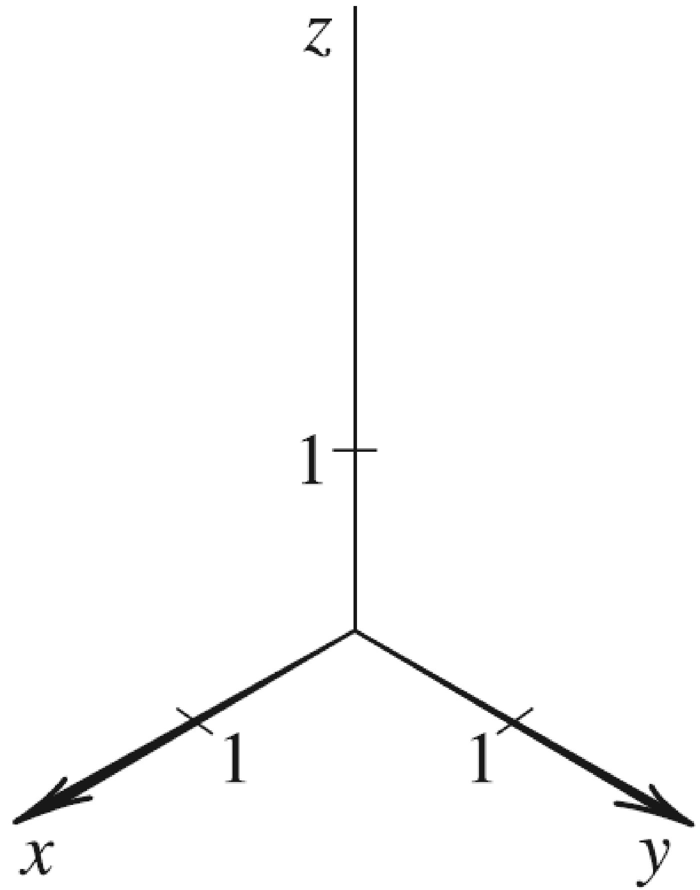

圖 140 笛卡兒座標系

圖141 向量的分量

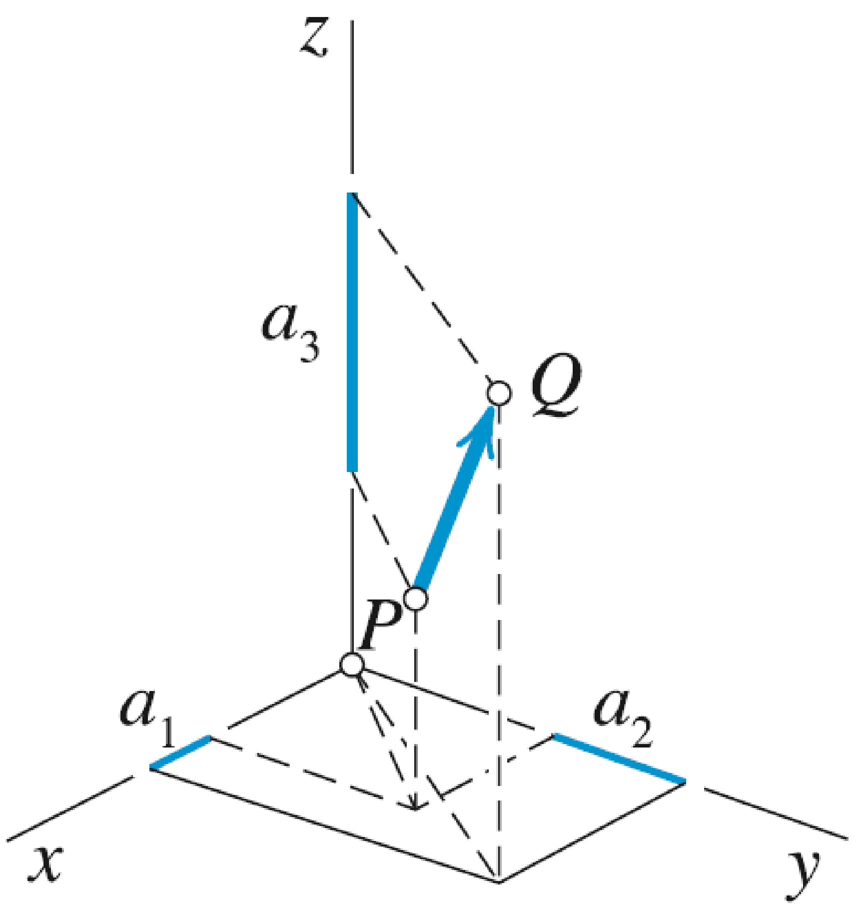

圖 141 向量的分量

範例 1 向量的分量與長度

■ 向量 **a** 具有起點 P :(4, 0, 2) 與終點 Q : (6, －1, 2)，其分量為

$$a_1 = 6 - 4 = 2, \quad a_2 = -1 - 0 = -1, \quad a_3 = 2 - 2 = 0.$$

故 **a** ＝ [2, －1, 0] (你可繪出 **a** 的草圖，如同圖141？) 由 (2) 式得長度

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 0^2} = \sqrt{5}.$$

若取 (- 1, 5, 8) 為 **a** 的起點，則對應終點為 (1, 4, 8)。

■ 若取原點(0, 0, 0) 為 **a** 的起點，則對應終點為 (2, －1, 0)，它的座標等於 **a** 的分量。藉此觀念我們可採用向量來決定空間的每一點，稱此向量為該點的**位置向量** (position vector) ，如下。

- 對固定的笛卡兒座標系，點 $A:(x, y, z)$ 的位置向量，是以原點 $(0, 0, 0)$ 為起點而 A 為終點（見圖142）的向量，因此表成分量為 $\mathbf{r} = [x, y, z]$，此亦可直接由 (1) 式代入$x_1 = y_1 = z_1 = 0$。

圖142 點 A : (x, y, z) 的位置向量 $\mathbf{r}$

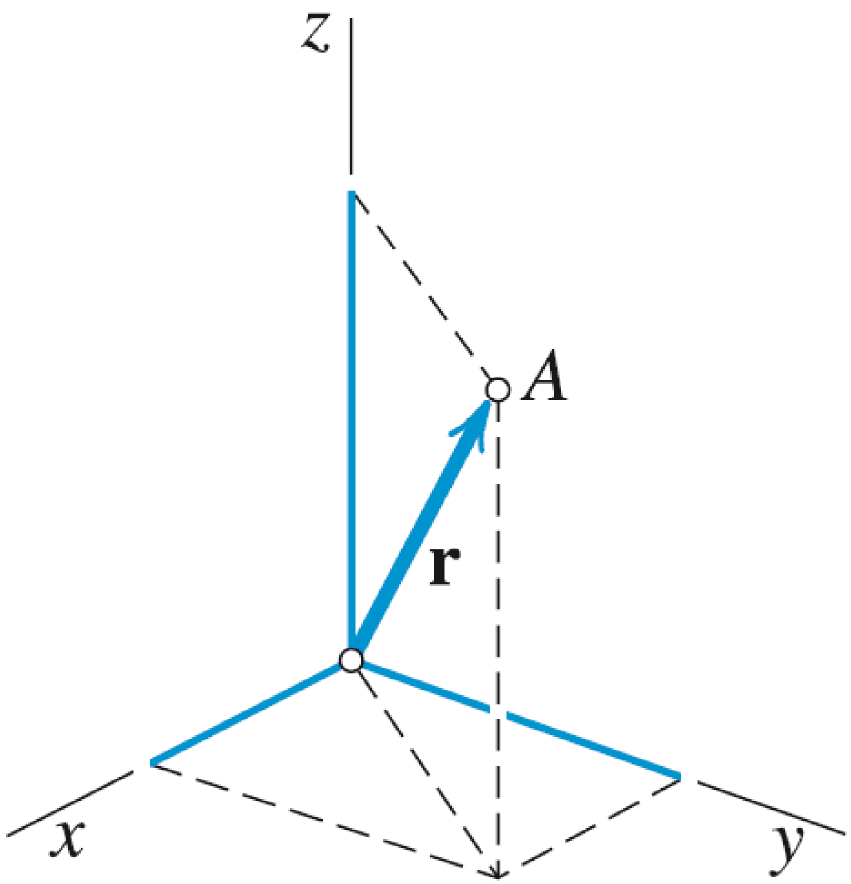

圖 142 點 A：(x, y, z) 的位置向量 $\mathbf{r}$

定理 1 向量為實數有序三元組

向量為實數有序三元組

對一固定的笛卡兒座標系，每一向量可由其分量的有序三元組，唯一決定之。反過來，對實數的有序三元組 (a_1, a_2, a_3) 就對應一向量 $\mathbf{a} = [a_1, a_2, a_3]$，以 $(0, 0, 0)$ 對應**零向量**（zero vector）$\mathbf{0}$，其長度為零且沒有方向。

故向量方程式 $\mathbf{a} = \mathbf{b}$ 時，等效於分量的三個方程式，$a_1 = b_1, a_2 = b_2, a_3 = b_3$。

定義 向量的加法

向量的加法

兩個向量 $\mathbf{a} = [a_1, a_2, a_3]$ 與 $\mathbf{b} = [b_1, b_2, b_3]$ 的和係由對應分量相加而得

(3)
$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = [a_1 + b_1,\quad a_2 + b_2,\quad a_3 + b_3].$$

幾何上來說，將向量放置如圖 143 所示（將 **b** 的起點放在 **a** 的終點），則 **a** + **b** 為自 **a** 的起點畫到 **b** 的終點之向量。

- 至於力的加法，藉平行四邊形定律求得在力學上兩力的**合力**（resultant of forces），見圖144。
- 圖145 呈現 (對平面上) 向量加法以「代數方式」和「幾何方式」得到相同的向量。

圖143 向量加法

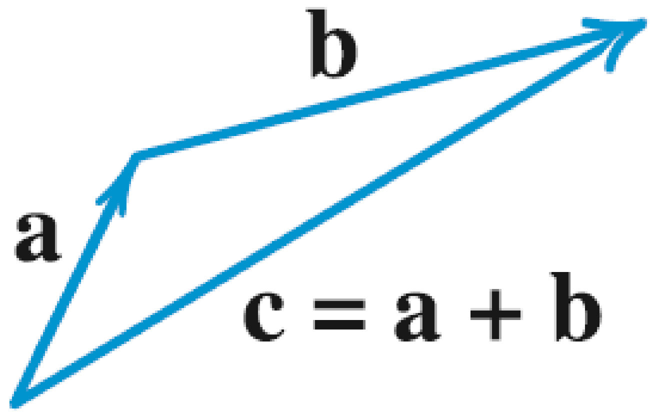

圖 143 向量加法

圖144 兩力的合力(平行四邊形定律)

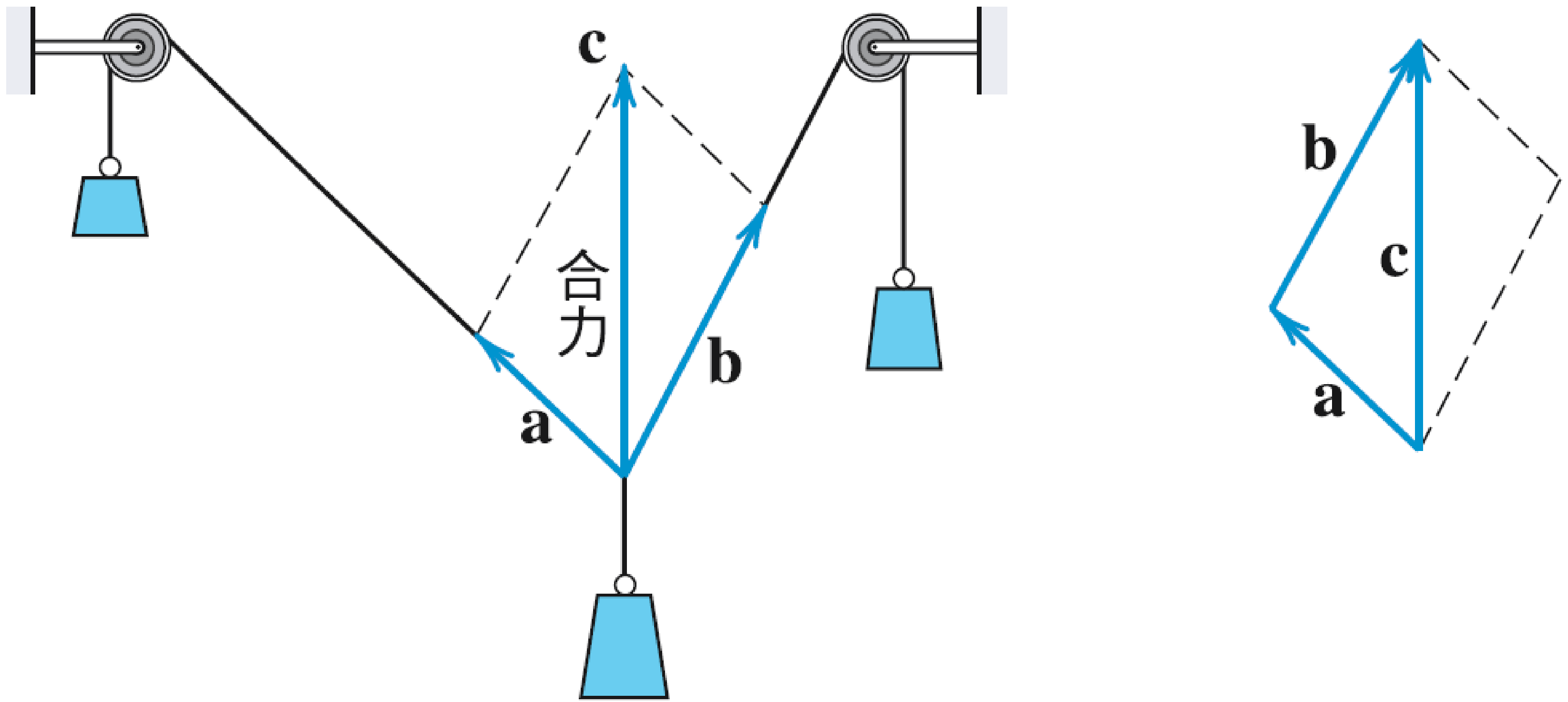

圖 144　兩力的合力（平行四邊形定律）

圖145 向量加法

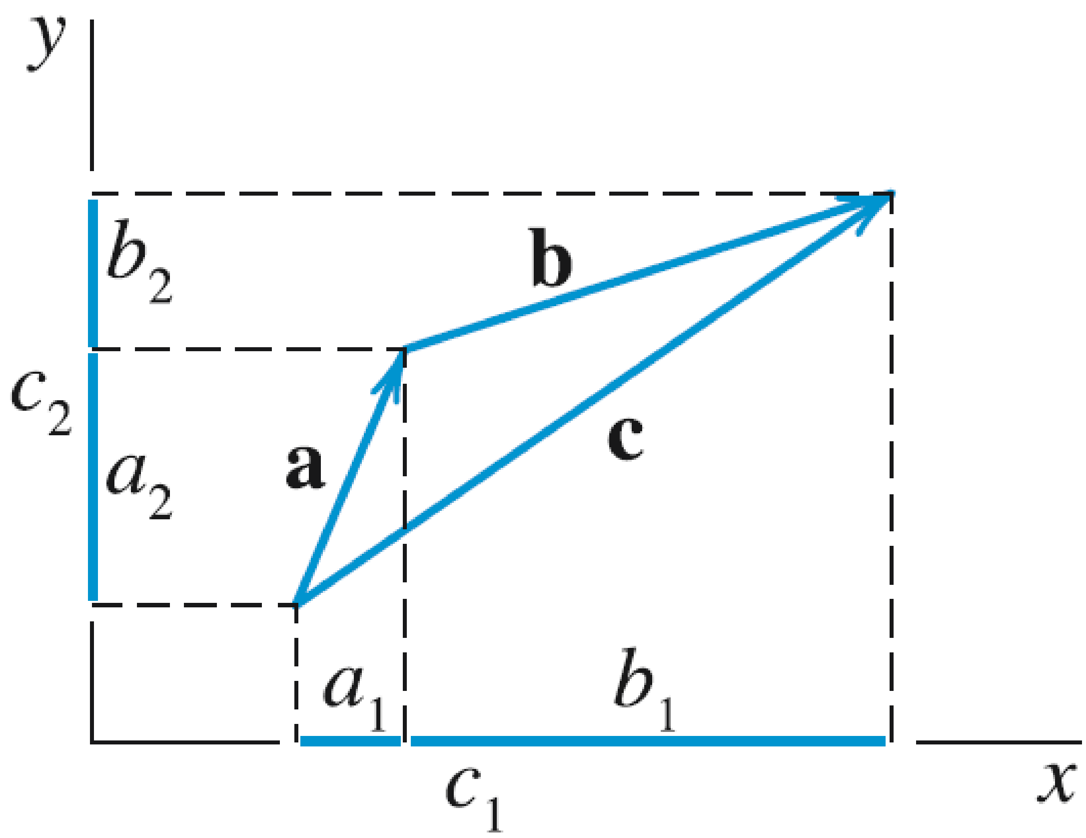

圖 145　向量加法

向量加法的基本性

- 由熟悉的實數定律類推（見圖146 與147）

(4)	(a)	$\mathbf{a}+\mathbf{b}=\mathbf{b}+\mathbf{a}$	（交換性）
	(b)	$(\mathbf{u}+\mathbf{v})+\mathbf{w}=\mathbf{u}+(\mathbf{v}+\mathbf{w})$	（結合性）
	(c)	$\mathbf{a}+\mathbf{0}=\mathbf{0}+\mathbf{a}=\mathbf{a}$	
	(d)	$\mathbf{a}+(-\mathbf{a})=\mathbf{0}.$	

此處 $-\mathbf{a}$ 代表向量具有長度 $|\mathbf{a}|$ 以及與 $\mathbf{a}$ 的方向相反。

- 在 (4b) 式，也可簡寫為 $\mathbf{u}+\mathbf{v}+\mathbf{w}$，且超過三個向量的和亦同理。$\mathbf{a}+\mathbf{a}$ 亦可取代寫為 2**a** 等。向量加法（與先前所用 $-\mathbf{a}$ 的記號）引起我們定義如下的第二個代數運算。

圖146 向量加法的交換性

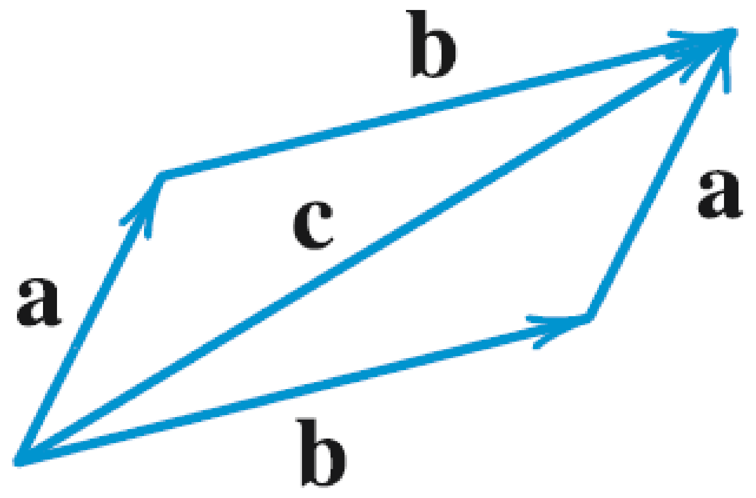

圖 146　向量加法的交換性

圖147 向量加法的結合性

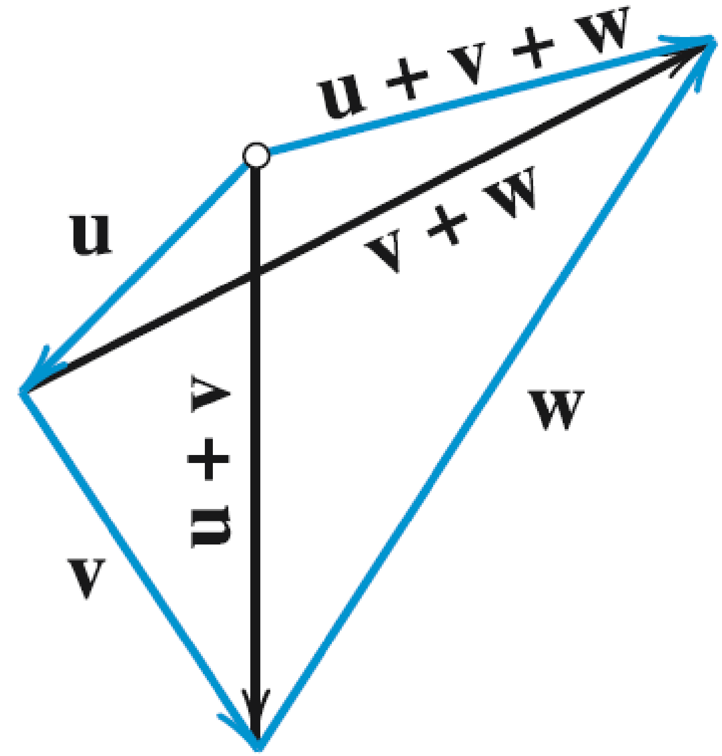

圖 147 向量加法的結合性

定義 純量乘法（與數相乘）

純量乘法（與數相乘）

任意向量 $\mathbf{a} = [a_1, a_2, a_3]$ 與任意純量 c（實數 c）的乘積 $c\mathbf{a}$，是由 $\mathbf{a}$ 的每一個分量與 c 相乘而得的向量，

(5)
$$c\mathbf{a} = [ca_1, ca_2, ca_3].$$

幾何上來說，若 $\mathbf{a} \neq 0$，則 $c\mathbf{a}$ 在 $c > 0$時與 $\mathbf{a}$ 同向；至於 $c < 0$ 時，其方向與 $\mathbf{a}$ 相反。無論如何，$c\mathbf{a}$ 的長度為 $|c\mathbf{a}| = |c||\mathbf{a}|$，且若 $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ 或 $c = 0$（或兩者），則 $c\mathbf{a} = \mathbf{0}$（見圖 148）。

<u>圖148 純量乘法</u>

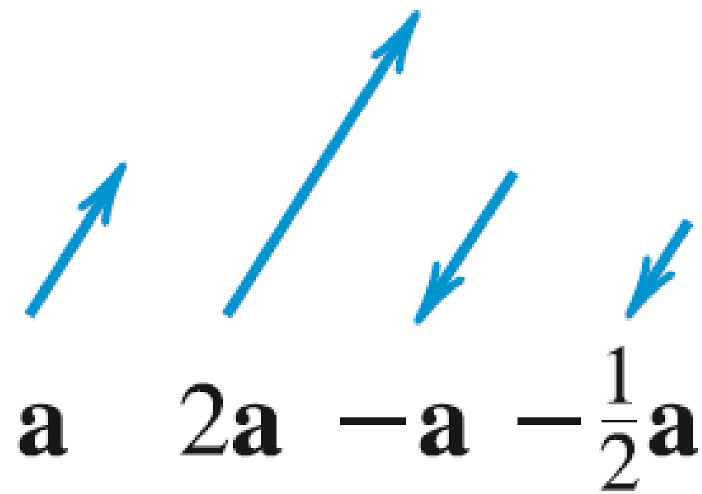

圖148 純量乘法
[向量與純量（數字）的相乘]

純量乘法的基本性質

- 由基本定義直接得

(6)

(a)	$c(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = c\mathbf{a} + c\mathbf{b}$	
(b)	$(c + k)\mathbf{a} = c\mathbf{a} + k\mathbf{a}$	
(c)	$c(k\mathbf{a}) = (ck)\mathbf{a}$	（寫成 $ck\mathbf{a}$）
(d)	$1\mathbf{a} = \mathbf{a}.$	

- 對任意向量 **a**，讀者可證明 (4) 與 (6) 式使得下式成立

(7)

(a)	$0\mathbf{a} = \mathbf{0}$
(b)	$(-1)\mathbf{a} = -\mathbf{a}.$

我們可以簡單寫成 **b** - **a** 取代 **b** + (- **a**)（圖149）。

圖149 向量的差

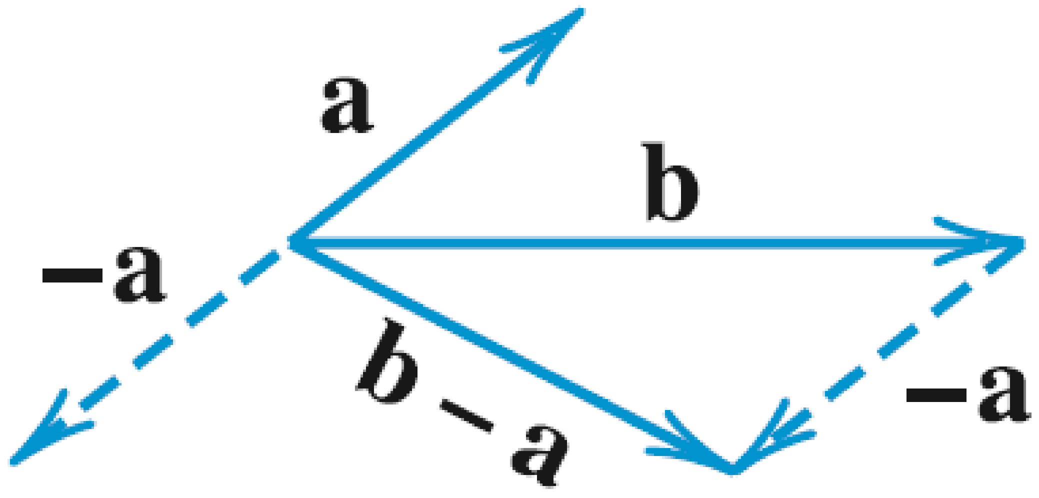

圖 149　向量的差

範例 2　向量的加法與純量的乘法

- 對一已知座標系，令

$$\mathbf{a} = [4,\ 0,\ 1] \quad \text{與} \quad \mathbf{b} = [2,\ -5,\ \tfrac{1}{3}].$$

$$-\mathbf{a} = [-4,\ 0,\ -1],\ 7\mathbf{a} = [28,\ 0,\ 7],\ \mathbf{a}+\mathbf{b} = [6, -5,\ \tfrac{4}{3}],\ \text{與}$$

$$2(\mathbf{a}-\mathbf{b}) = 2[2,\ 5,\ \tfrac{2}{3}] = [4,\ 10,\ \tfrac{4}{3}] = 2\mathbf{a} - 2\mathbf{b}.$$

單位向量

- 單位向量 **i**、**j**、**k** 除了 $\mathbf{a} = [a_1, a_2, a_3]$，另一常用來表達向量的方式為

(8) $$\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$$

- 在此式子，**i**、**j**、**k** 為笛卡兒座標系座標軸上正方向的單位向量（圖150）。故，以分量表示為

(9) $$\mathbf{i} = [1, \quad 0, \quad 0], \qquad \mathbf{j} = [0, \quad 1, \quad 0], \qquad \mathbf{k} = [0, \quad 0, \quad 1]$$

且(8) 式的右邊是三個平行於座標軸的向量和。

圖150 單位向量 i、j、k 與其表示式

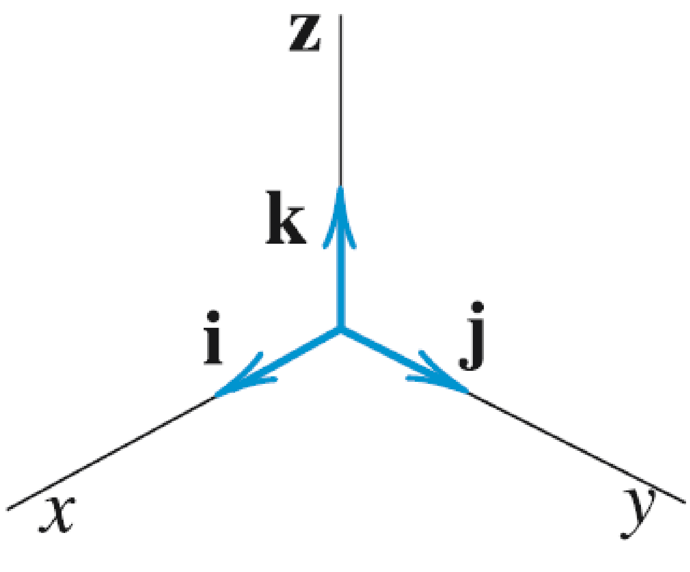

圖 150 單位向量 **i**, **j**, **k** 與其表示 (8) 式

範例 3　向量的 i、j、k 表示法

- 在範例 2 中得 $\mathbf{a} = 4\mathbf{i} + \mathbf{k},\ \mathbf{b} = 2\mathbf{i} - 5\mathbf{j} + \frac{1}{3}\mathbf{k}$ 等等。
- 所有向量 $\mathbf{a} = [a_1, a_2, a_3] = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$（以實數為分量）構成**實數向量空間**（real vector space）R^3，其向量加法與純量乘法的兩個代數運算如方才之定義，R^3 具有三維。此三個向量 $\mathbf{i}$、$\mathbf{j}$、$\mathbf{k}$ 稱為 R^3 的**標準基底**（standard basis）。在一固定笛卡兒座標系統下，其指定向量的表示 (8) 式為唯一的。