第 9 章 向量微分，梯度，散度，旋度

9.1 二度與三度空間向量
9.2 內積（點積）
9.3 向量積（叉積）
9.4 向量函數與純量函數，場，導數
9.5 曲線，弧長，曲率，扭率
9.6 微積分複習：多變數函數（選讀）
9.7 純量場的梯度，方向導數
9.8 向量場的散度
9.9 向量場的旋度

定義 向量的內積（點積）

向量的內積（點積）

兩向量 **a** 與 **b** 的**內積**（inner product）或**點積**（dot product）**a**・**b**（讀做 **a** dot **b**），為它們長度與夾角的餘弦之乘積（見圖 151）

(1)
$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos\gamma \qquad \text{若} \quad \mathbf{a} \neq \mathbf{0}, \mathbf{b} \neq \mathbf{0}$$
$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = 0 \qquad \text{若} \quad \mathbf{a} = \mathbf{0} \ \text{或} \ \mathbf{b} = \mathbf{0}.$$

a 與 **b** 間的角度 γ，$0 \leqq \gamma \leqq \pi$，如圖 151 所示，是以兩向量起點重合時所量得。以分量表示 $\mathbf{a} = [a_1, a_2, a_3]$，$\mathbf{b} = [b_1, b_2, b_3]$，與

(2)
$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3.$$

圖151 向量間夾角與內積的值

- 當 **a** = **0** 或 **b** = **0** 時，由於γ未被定義，故 (1) 式第 2 行是必要的。如下所示，由 (1) 式推得 (2) 式。

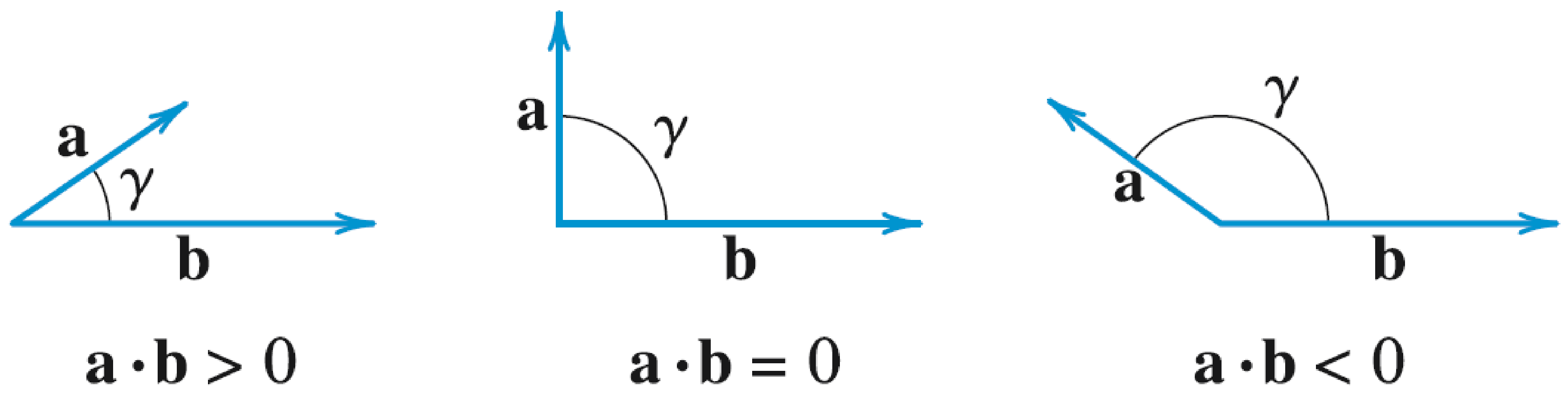

圖 151 向量間夾角與內積的值

正交性

- **正交性**（orthogonality） 因 (1) 式的餘弦可能為正、零或負，故內積亦然（圖151）。內積為零的情況在實務上頗有趣且提供下列觀念。

- 若 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$，則稱向量 **a** 與向量 **b** 正交。那麼 **b** 也正交於 a，且稱 a 與 b為**正交向量**（orthogonal vectors）。很清楚地對於非零向量成立，若且唯若 $\cos\gamma = 0$，即 $\gamma = \pi/2 (90°)$，則 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$。

定理 1 正交性

正交性

若且唯若兩非零向量互相垂直，則此兩向量的內積是零。

長度與角度

- 將 **b** = **a** 代入 (1) 式得 **a** · **a** = | **a** |²，故

(3) $$|\mathbf{a}| = \sqrt{\mathbf{a}\bullet\mathbf{a}}.$$

- 由 (3) 與 (1) 式，得兩非零向量的夾角□為

(4) $$\cos\gamma = \frac{\mathbf{a}\bullet\mathbf{b}}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|} = \frac{\mathbf{a}\bullet\mathbf{b}}{\sqrt{\mathbf{a}\bullet\mathbf{a}}\sqrt{\mathbf{b}\bullet\mathbf{b}}}.$$

範例 1 內積，向量夾角

- 求 $\mathbf{a} = [1, 2, 0]$ 與 $\mathbf{b} = [3, -2, 1]$ 的大小與內積，以及此兩向量夾角。

解 $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = 1\cdot 3 + 2\cdot(-2) + 0\cdot 1 = -1, |\mathbf{a}| = \sqrt{\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}} = \sqrt{5}, |\mathbf{b}| = \sqrt{\mathbf{b}\cdot\mathbf{b}} = \sqrt{14}$

，代入(4) 式得角度為

$$\gamma = \arccos\frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|} = \arccos(-0.11952) = 1.69061 = 96.865°.$$

■ 由內積的定義可推知下列性質，對任意向量 **a**、**b**、**c** 與純量 q_1、q_2

(5)	(a)	$(q_1\mathbf{a} + q_2\mathbf{b})\cdot\mathbf{c} = q_1\mathbf{a}\cdot\mathbf{c} + q_2\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}$	（線性）
	(b)	$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = \mathbf{b}\cdot\mathbf{a}$	（對稱性）
	(c)	$\mathbf{a}\cdot\mathbf{a} \geqq 0$ $\mathbf{a}\cdot\mathbf{a} = 0$ 若且唯若 $\mathbf{a} = \mathbf{0}$	（正定性）

■ 故點積具交換性 [見 (5b) 式]，以及內積對加法具分配性；事實上，從 (5a) 式代入 $q_1 = 1$ 與 $q_2 = 1$ 得到

(5*) $(\mathbf{a} + \mathbf{b})\cdot\mathbf{c} = \mathbf{a}\cdot\mathbf{c} + \mathbf{b}\cdot\mathbf{c}$ （分配性）

- 再者，從 (1) 式以及 $|\cos\gamma| \leqq 1$ 推知

(6) $$|\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}| \leqq |\mathbf{a}||\mathbf{b}|$$ （柯西－史瓦茲不等式）

- 使用上式與 (3) 式，可證明（見習題18）

(7) $$|\mathbf{a}+\mathbf{b}| \leqq |\mathbf{a}|+|\mathbf{b}|$$ （三角不等式）

由幾何上來說，(7) 式中「＜」表示三角形的一邊必小於其它兩邊之和，此即 (7) 式命名的緣由。

- 內積的簡易直接計算顯示

(8) $$|\mathbf{a}+\mathbf{b}|^2+|\mathbf{a}-\mathbf{b}|^2 = 2(|\mathbf{a}|^2+|\mathbf{b}|^2)$$ （平行四邊形等式）

- (6) 至 (8) 式在所謂**希伯特空間**（Hilbert spaces）（抽象內積空間）扮演基本的角色，此構成量子力學的基礎。

■ 由 (1) 式推導 (2) 式將 8.1 節 (8) 式寫為 $\mathbf{a} = a_1\mathrm{i}+a_2\mathrm{j}+a_3\mathrm{k}$ 與 $\mathbf{b} = b_1\mathbf{i}+b_2\mathbf{j}+b_3\mathbf{k}$，若將以上代入 $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$ 且用 (5a*) 式，則首先得 $3\times 3 = 9$ 項積的和

$$\mathbf{a}\bullet\mathbf{b} = a_1b_1\mathbf{i}\bullet\mathbf{i} + a_1b_2\mathbf{i}\bullet\mathbf{j} + \cdots + a_3b_3\mathbf{k}\bullet\mathbf{k}.$$

■ 既然 $\mathbf{i}$、$\mathbf{j}$、$\mathbf{k}$ 為單位向量，使得由 (3) 式知 $\mathbf{i}\cdot\mathbf{i} = \mathbf{j}\cdot\mathbf{j} = \mathbf{k}\cdot\mathbf{k} = 1$。因為座標軸互相垂直，則 $\mathbf{i}$、$\mathbf{j}$、$\mathbf{k}$ 亦然，以及定理1 使得這九個乘積的其它六項為零，即 $\mathbf{i}\cdot\mathbf{j} = \mathbf{j}\cdot\mathbf{i} = \mathbf{j}\cdot\mathbf{k} = \mathbf{k}\cdot\mathbf{j} = \mathbf{k}\cdot\mathbf{i} = \mathbf{i}\cdot\mathbf{k} = 0$，而且此點使得 $\mathrm{a}\cdot\mathrm{b}$ 的和簡化成 (2) 式。

範例 2　以內積表示力所作的功

- 功為主要應用。功與一定值力 **p** 作用在物體上相關（對變化力，見 9.1 節）。令物體被移動 **d** 位移。那麼位移的 **p** 力所作的功定義為

$$W = |\mathbf{p}||\mathbf{d}|\cos\alpha = \mathbf{p}\cdot\mathbf{d} \tag{9}$$

- 亦即，力的大小 $|\mathbf{p}|$ 乘以位移的長度 $|\mathbf{d}|$ 再乘以 **p** 與 **d** 夾角的餘弦 α（圖152）。若 **p** 與 **d** 正交，則功為零（為什麼？）。若 $\alpha > 90°$，則 $W < 0$，此表示在位移中我們必須作功以對抗力（想想看游泳橫渡河流，與流向夾α 角對抗河流）。

範例 2 (圖152)

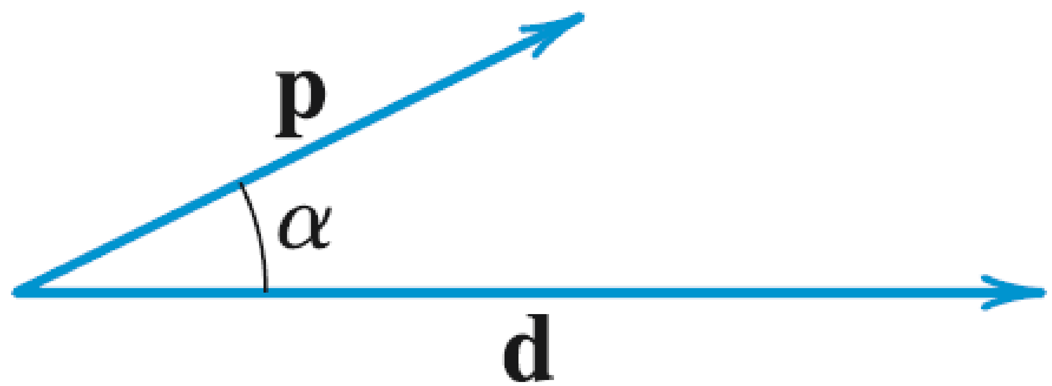

圖 152 力所作的功

範例 3 力在某一已知方向的分量

■ 需施多少力在圖153 的繩索上，將可拉住 5000 1b 的汽車在與水平夾角 25° 的斜坡下呈平衡？

解 引進如圖所示座標，其重是 $\mathbf{a} = [0, -5000]$，因此力指向下，在負 y 的方向。我們必須將 **a** 表成兩力的和（合成），$\mathbf{a} = \mathbf{c} + \mathbf{p}$，其中 **c** 為汽車作用在斜坡的力，且 **p** 平行繩索具大小（見圖153）

$$|\mathbf{p}| = |\mathbf{a}| \cos\gamma = 5000 \cos 65° = 2113\ [1b]$$

■ 而單位向量 **u** 的方向與繩索方向相反；此處 $\gamma = 90° - 25° = 65°$ 為 **a** 與 **p** 的夾角。於是在繩索方向的向量是

$$\mathbf{b} = [-1,\ \tan 25°] = [-1,\ 0.46631],\ \text{故}\ |\mathbf{b}| = 1.10338,$$

範例 3 (續)

- 所以

$$\mathbf{u} = -\frac{1}{|\mathbf{b}|}\mathbf{b} = [0.90631, -0.42262].$$

- 因 $|\mathrm{u}| = 1$ 且 $\cos\gamma > 0$，故知道也可將結果寫為

$$|\mathbf{p}| = (|\mathbf{a}|\cos\gamma)|\mathbf{u}| = \mathbf{a}\cdot\mathbf{u} = -\frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|} = \frac{5000\cdot 0.46631}{1.10338} = 2113\ [\text{1b}].$$

- 答案：約 2100 磅。

範例 3 (圖153)

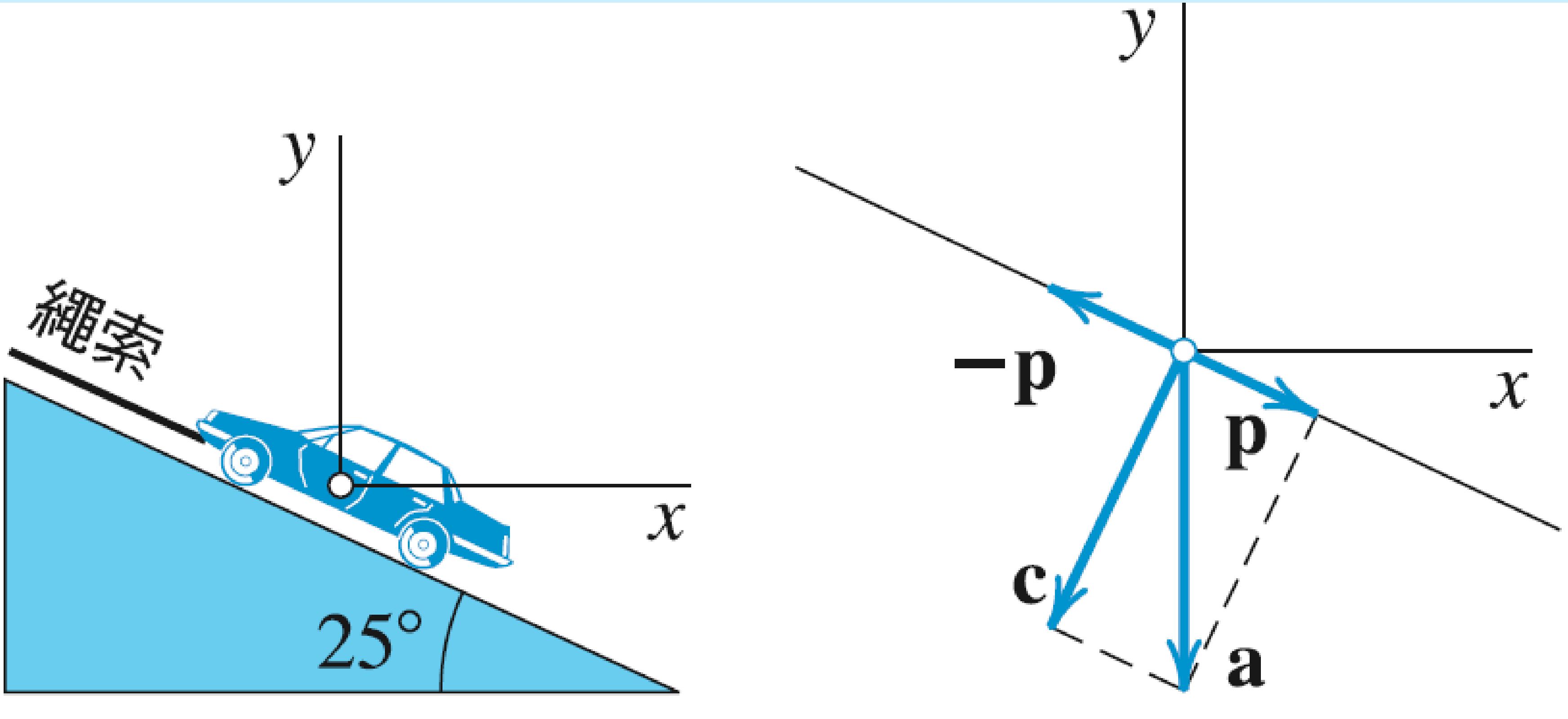

圖 153 範例 3

- 範例 3 是典型應用在使用向量 **a** 於向量 **b**（≠ 0）方向的分量或**投影**（projection）觀念，定義為（見圖 154）

(10) $$p = |\mathbf{a}| \cos \gamma.$$

- 因此 p 是 **a** 在平行 **b** 的直線 l 上的正交投影的長度，若 $p\mathbf{b}$ 與 **b** 同向，則 p 取正號；而當 $p\mathbf{b}$ 與 **b** 反向，則 p 取負號，見圖 154。

圖154 向量 a 在向量 b方向上的分量

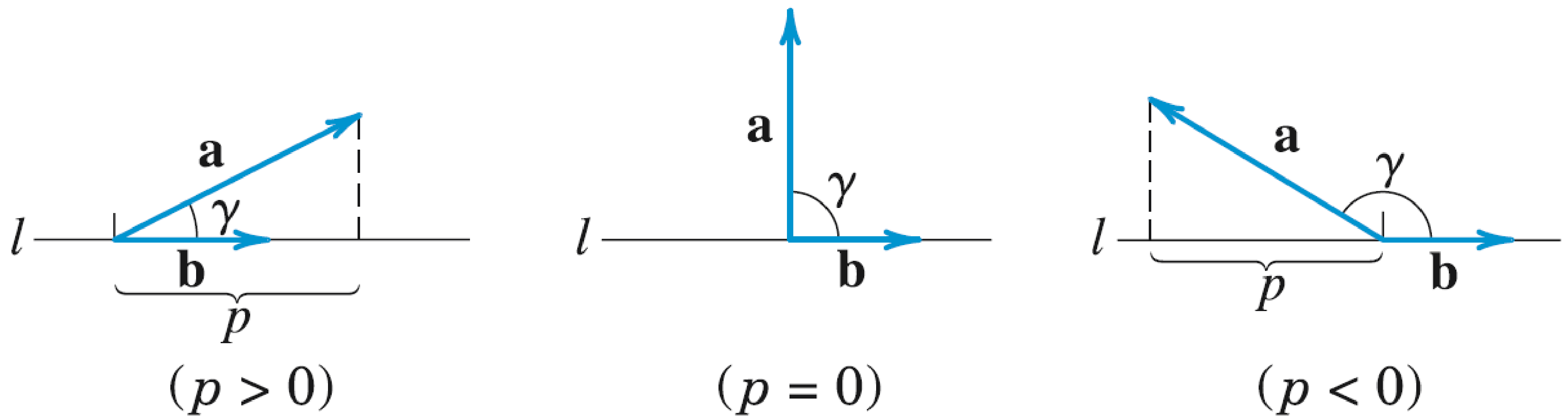

圖 154 向量 a 在向量 b 方向上的分量

■ 將 (10) 式乘以 $|\mathbf{b}|/|\mathbf{b}|=1$，使其分子得到 $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$，故

(11) $$p=\frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|} \qquad (\mathbf{b}\neq\mathbf{0}).$$

■ 若 **b** 為單位向量，如同常用於固定的方向，則 (11) 式化簡成

$$p=\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} \qquad (|\mathbf{b}|=1).$$

(12)

■ 圖 155 顯示 **a** 在 **b** 方向（如在圖 154 上）的投影 p，與 **b** 在**a** 方向的投影 $q=|\mathbf{b}|\cos\gamma$。

圖155

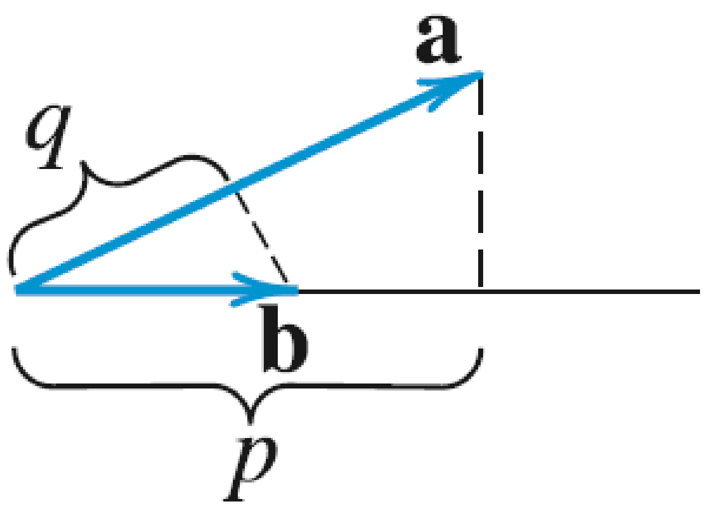

圖 155 **a** 在 **b** 的投影 p，與 **b** 在 **a** 的投影 q

範例 4 單範正交基底

- 根據定義，三度空間的單範正交基底是正交單位向量組成的基底 $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ 。它有極大的優點在對一已知向量 $\mathbf{v}$ 表成 $\mathbf{v}$ □$l_1\mathbf{a}+l_2\mathbf{b} + l_3\mathbf{c}$ 時，求係數是相當簡便的

- 我們稱 $l_1 = \mathbf{a} \cdot \mathbf{v}$，$l_2 = \mathbf{b} \cdot \mathbf{v}$，$l_3 = \mathbf{c} \cdot \mathbf{v}$。的確此式可分別取 $\mathbf{a}$、$\mathbf{b}$、$\mathbf{c}$ 的表示式與$\mathbf{v}$ 的內積簡單得到，同時採用基底的單範正交性 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{v} = l_1\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}+l_2\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}+l_3\mathbf{a} \cdot \mathbf{c} = l_1$ 等等。

- 例如 8.1 節 (8) 式關於笛卡兒座標系統的單位向量 $\mathbf{i}$、$\mathbf{j}$、$\mathbf{k}$ 構成一組單位正交基底，稱為相對已知座標系的標準基底。

範例 5 平面上正交直線

■ 求在 xy 平面上通過 $p:(1, 3)$ 且垂直直線 $L_2: x-2y+2=0$ 的直線 L_1，見圖 156。

解 解題觀念是根據 (2) 式採 $\mathbf{a}=[a_1, a_2]\neq 0$ 與 $\mathbf{r}=[x, y]$ 代入 $\mathbf{a}\cdot\mathbf{r}=c$，寫直線通式 $\mathrm{L}_1: a_1x+a_2y=c$。那麼 L_1* 通過原點且平行 L_1 時 $\mathbf{a}\cdot\mathbf{r}=0$。因此，由定理 1，向量 $\mathbf{a}$ 垂直向量 $\mathbf{r}$。故 $\mathbf{a}$ 垂直 L_1* 也垂直 L_1，因 L_1 與 L_1* 平行之故。$\mathbf{a}$ 稱為 L_1（與 L_1* 的）的**法線向量**（normal vector）。

■ 於是已知直線 $x-2y+2=0$ 的法線向量為 $\mathbf{b}=[1, -2]$。因此若 $\mathbf{b}\cdot\mathbf{a}=a_1-2a_2=0$，例如令 $\mathbf{a}=[2, 1]$，則 L_1 垂直 L_2。所以得 L_1 為 $2x+y=c$。又 L_1 通過 $P:(1, 3)$ 在 $2\cdot 1+3=c=5$ 時。

範例 5 (圖156)

- 答案：$y = -2x+5$。證明交點為 $(x, y) = [1.6, 1.8]$。

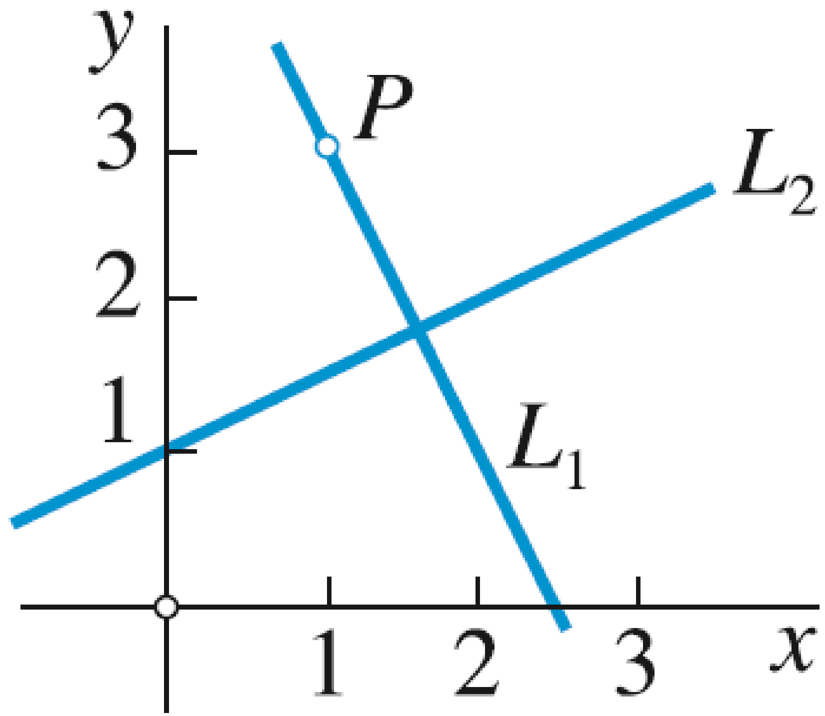

圖 156 範例 5

範例 6 平面的法線向量

- 求與平面 $4x+2y+4z=-7$ 垂直的單位向量。

解 利用 (2) 式，可將空間的任一平面表為

(13) $$\mathbf{a}\cdot\mathbf{r} = a_1x + a_2y + a_3z = c$$

- 其中，$\mathbf{a} = [a1, a2, a3] \neq 0$，且 $\mathbf{r} = [x, y, z]$。在 $\mathbf{a}$ 方向的單位向量（圖157）為

$$\mathbf{n} = \frac{1}{|\mathbf{a}|}\mathbf{a}$$

- 將 (13) 式除以|**a**|得

(14) $$\mathbf{n}\cdot\mathbf{r} = p \qquad \text{其中} \quad p = \frac{c}{|\mathbf{a}|}.$$

範例 6 (續)

- 由 (12) 式知 p 為 **r** 在 **n** 方向的投影，此投影對平面上的任一點的位置向量 **r** 具有相同常數值 c/□**a**□，顯然此點僅在 **n** 垂直平面時成立。**n** 稱為此平面的**單位法線向量**（unit normal vector）（另一為 －**n**）。
- 再者，由上述與投影的定義推知□p□是平面至原點距離，(14) 式稱為平面的**赫斯正規型**（Hesse's normal form）。本例，**a** ＝ [4, 2, 4]，c ＝ －7，□**a**□＝ 6，

$$\mathbf{n} = \tfrac{1}{6}\mathbf{a} = \left[\tfrac{2}{3},\ \tfrac{1}{3},\ \tfrac{2}{3}\right]$$

此平面至原點距離為7/6。

範例 6 (圖157)

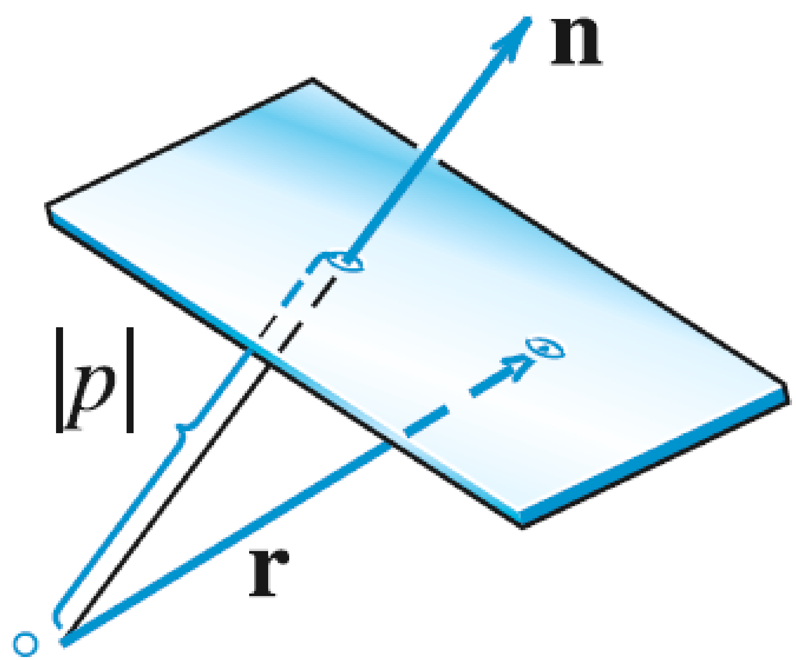

圖 157 平面的法線向量