第 9 章 向量微分，梯度，散度，旋度

第 9 章 向量微分，梯度，散度，旋度

定義 向量的向量積（叉積，外積）

向量的向量積（叉積，外積）

兩向量 **a** 與 **b** 的**向量積** [也叫**叉積**（cross product）或**外積**（outer product）] $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$（讀做 **a** cross **b**）為向量，如下

$$\mathbf{v} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$$

若 **a** 與 **b** 為同向或反向，或若 $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ 或 $\mathbf{b} = \mathbf{0}$ 則 $\mathbf{v} = \mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{0}$，否則 $\mathbf{v} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$ 具長度（大小）

$$|\mathbf{v}| = |\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \sin \gamma. \tag{1}$$

此大小為圖 158 藍色平行四邊形的面積，γ 為 **a** 與 **b** 間夾角（如同 8.2 節）。$\mathbf{v} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$ 的方向垂直 **a** 與 **b** 兩者，且使得 **a**、**b**、**v** 依此順序構成右手三元組（right-handed triple），如圖 158－160 所示（說明於下）。

圖158 向量積

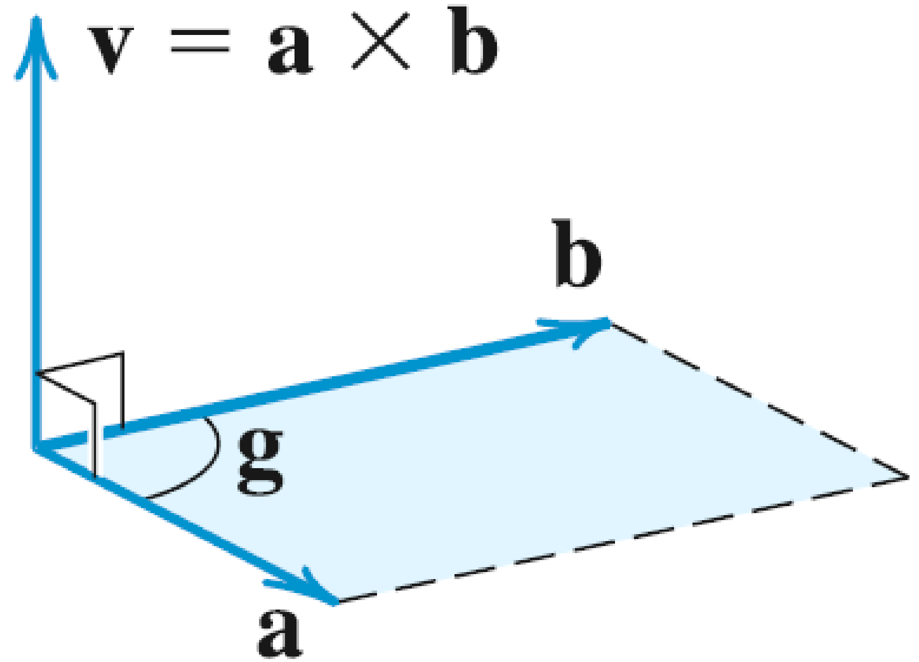

圖 158 向量積

圖159 向量 a、b、v右手三元組

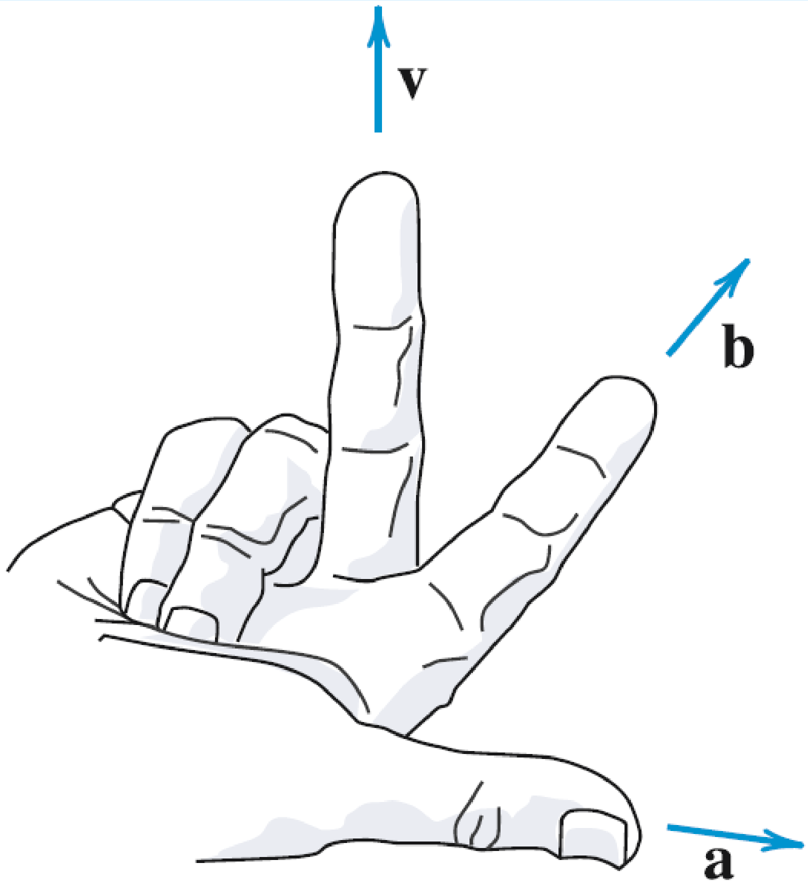

圖 159 向量 a、b、v 的
右手三元組

圖160 右手螺旋

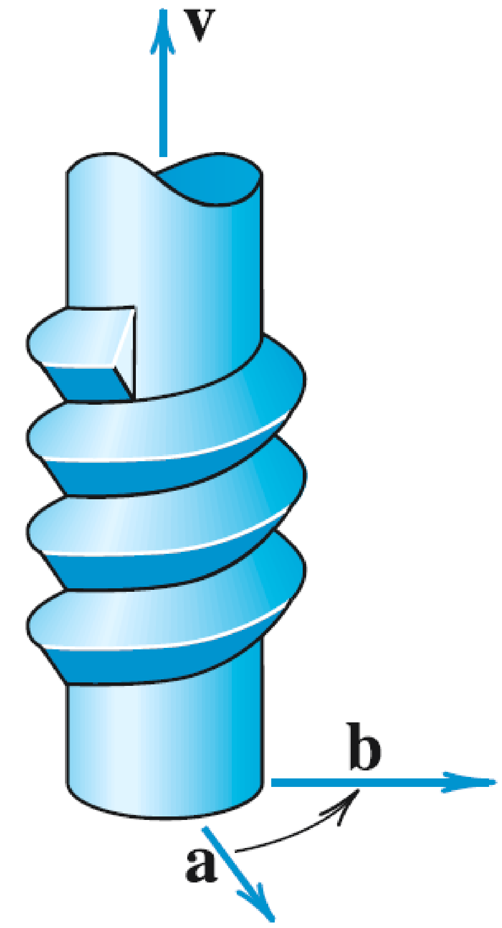

圖 160 右手螺旋

右手系,右手三元組

- 以分量表示，令 **a** ＝ $[a_1, a_2, a_3]$ 與 **b** ＝ $[b_1, b_2, b_3]$，那麼 **v** ＝ [1, 2, 3] ＝ a × b 的分量為

(2) $$v_1 = a_2b_3 - a_3b_2, \qquad v_2 = a_3b_1 - a_1b_3, \qquad v_3 = a_1b_2 - a_2b_1.$$

- 此處，笛卡兒座標系為**右手系**（right-handed），如以下說明（見圖161）（至於左手系統，v 的每一分量必須乘上「－1」）。

- **右手三元組** 三元組 **a**、**b**、**v** 向量是右手系，當右手如圖159 按相同 **a**、**b**、**v** 的順序伸出拇指、食指與中指的方位，我們也可說若旋轉 **a** 經過γ角度（ $< \pi$ ）到 **b** 的方向，則 **v** 前進如同右手系螺絲以同樣方式旋轉所造成方向（圖160）。

右手笛卡兒座標系

- **右手笛卡兒座標系**（right-handed Cartesian coordinate system） 若系統的對應單位向量 **i**、**j**、**k** 為如圖 161a 軸的正方向構成右手系三元組，則稱系統為**右手系**（right-handed）（見8.1 節）。若 **k** 的方向相反，則稱此系統為**左手系**（left-handed），如圖 161b 所示。應用時，我們較喜歡右手系統。

圖161 笛卡兒座標系的兩個類型

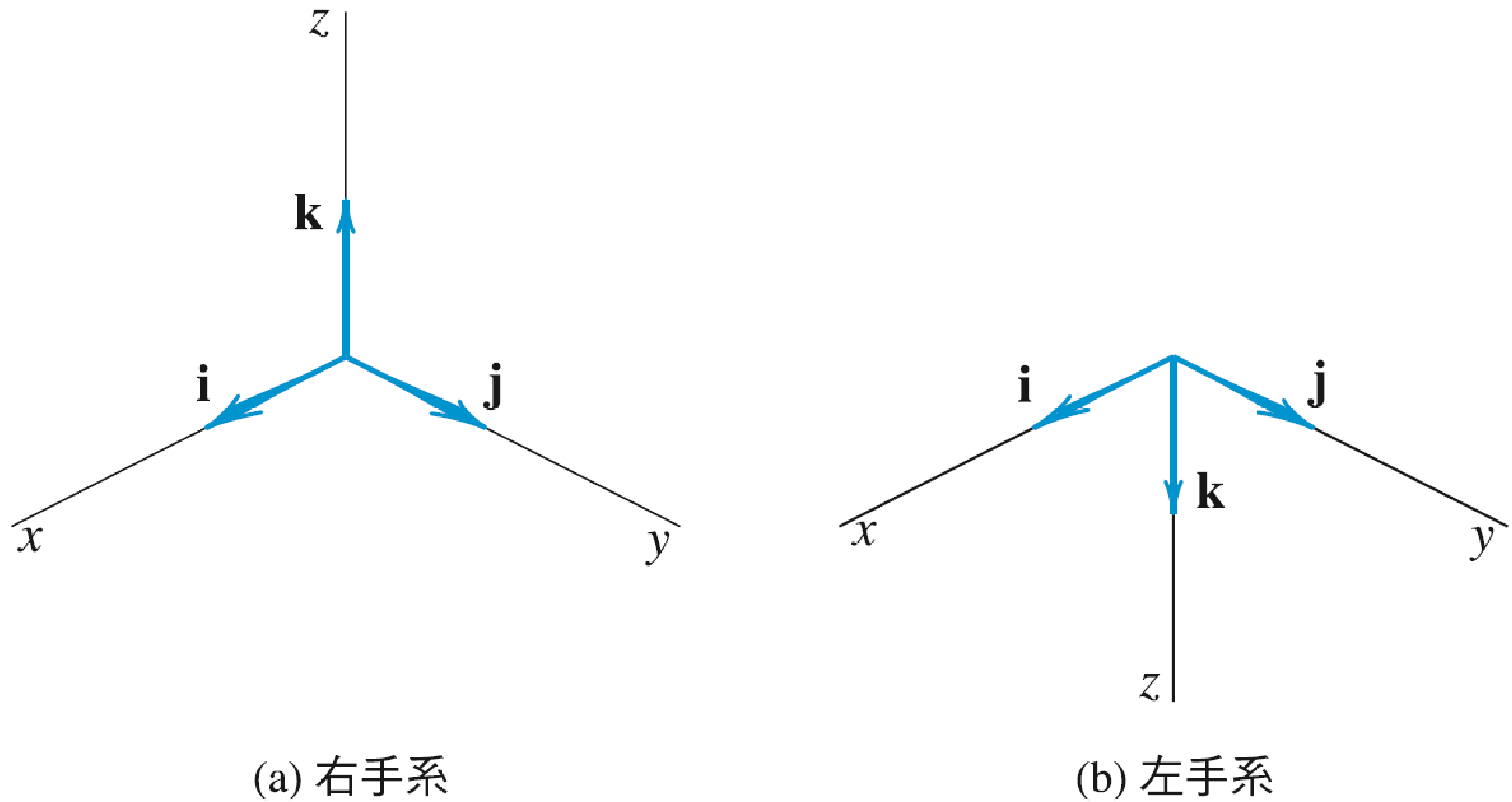

圖 161　笛卡兒座標系的兩個類型

- 如何記憶 (2) 式若熟悉二階與三階行列式，就知道可將 (2) 式寫成

$$(2^*)\quad v_1 = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, \qquad v_2 = -\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} = +\begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}, \qquad v_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$$

- 以及 $\mathbf{v} = [1, 2, 3] = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k}$ 是對下列符號行列式的第1 列展開（稱此行列式為「符號」是因為第 1 列為向量而非數字組成）。

$$(2^{**})\quad \mathbf{v} = \mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}\mathbf{i} - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}\mathbf{j} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\mathbf{k}.$$

- 對左手系統，其行列式在其前面具有負號。

範例 1 向量積

- 右手系座標表示的 **a** ＝ [1, 1, 0] 與 **b** ＝ [3, 0, 0]，其向量積 **v** ＝**a** × **b** 可由 (2) 式得到

$$v_1 = 0, \quad v_2 = 0, \quad v_3 = 1 \cdot 0 - 1 \cdot 3 = -3.$$

- 由 (2**) 證實

$$\mathbf{v} = \mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \mathbf{i} - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} \mathbf{k} = -3\mathbf{k} = [0,\ 0,\ -3].$$

- 描繪 **a**、**b** 與 **v** 來驗算此一簡便情況的結果。讀者能否看出 *xy* 平面上的兩向量之向量積恆與*z* 軸平行（或等於零向量）？

範例 2 標準基底向量的向量積

$$
\mathbf{i}\times\mathbf{j}=\mathbf{k},\qquad \mathbf{j}\times\mathbf{k}=\mathbf{i},\qquad \mathbf{k}\times\mathbf{i}=\mathbf{j}
$$
$$
\mathbf{j}\times\mathbf{i}=-\mathbf{k},\qquad \mathbf{k}\times\mathbf{j}=-\mathbf{i},\qquad \mathbf{i}\times\mathbf{k}=-\mathbf{j}. \tag{3}
$$

- 我們將在下面證明採用 (3) 式

定理 1 向量積的一般性質

向量積的一般性質

(a) 對每一純量 l，

(4) $$(l\mathbf{a}) \times \mathbf{b} = l(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{a} \times (l\mathbf{b}).$$

(b) 向量交叉乘法對加法具分配性，即

(5)
$$(\alpha) \quad \mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) + (\mathbf{a} \times \mathbf{c}),$$
$$(\beta) \quad (\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = (\mathbf{a} \times \mathbf{c}) + (\mathbf{b} \times \mathbf{c}).$$

(c) 向量交叉乘法不具交換性，但具反交換性，即

(6) $$\mathbf{b} \times \mathbf{a} = -(\mathbf{a} \times \mathbf{b})$$ （圖 162）

(d) 向量交叉乘法不具結合性，即一般而言

(7) $$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \neq (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c}$$

所以括號不可省略。

圖162 交叉乘法的反交換性

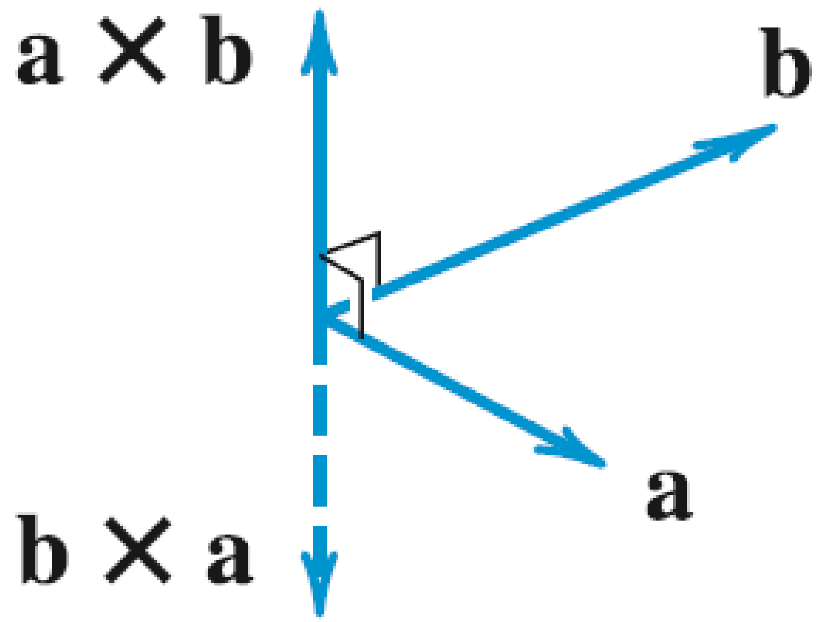

圖 162 交叉乘法的反交換性

定理 1 證明

- (4) 式由定義直接得證。在 (5) 式，由 (2*) 式得到左邊的第一項為

$$
\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 + c_2 & b_3 + c_3 \end{vmatrix} = a_2(b_3 + c_3) - a_3(b_2 + c_2)
$$

$$
= (a_2 b_3 - a_3 b_2) + (a_2 c_3 - a_3 c_2)
$$

$$
= \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix}.
$$

- 由 (2*) 知以上兩行列式和是□**(a × b) + (a × c)** 的第一項，即(5α) 式的右邊。同理可證得 (5α) 式其它項與 (5β) 式的等式。

- 由 (2**) 藉已知第 2 列與第 3 列互換使得行列式乘以－1，證得反交換性 (6) 式。由幾何證實它，若取 $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{v}$ 與 $\mathbf{b} \times \mathbf{a} = \mathbf{w}$；則 $|\mathbf{v}| = |\mathbf{w}|$ ，以及對構成右手系三元組的 **b**、**a** 與 w 而言，必使得 $\mathbf{w} = -\mathbf{v}$。

- 最後，$\mathbf{i} \times (\mathbf{i} \times \mathbf{j}) = \mathbf{i} \times \mathbf{k} = -\mathbf{j}$，而$(\mathbf{i} \times \mathbf{i}) \times \mathbf{j} = \mathbf{0} \times \mathbf{j} = \mathbf{0}$（見範例 2）。此即證畢 (7) 式。

範例 3 力矩

- 力學上，一力**p** 對一點Q 的力矩 m，定義為積 $m = |\mathbf{p}|\, d$，其中 d 為 Q 與作用線L 間（垂直）距離（圖163）。若 **r** 是自 Q 到 L 線上任一點的向量，則 $d = |\mathbf{r}| \sin\gamma$ （圖163），且

$$m = |\mathbf{r}|\,|\mathbf{p}| \sin\ \gamma .$$

- 因為γ為 **r** 與 **p** 的夾角，故由 (1) 式得知 $m = |\mathbf{r} \times \mathbf{p}|$。此向量為

$$\mathbf{m} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} \tag{8}$$

- 稱為 p 對 Q 的**力矩向量**（moment vector）或**向量力矩**（vector moment）。其大小為 m。若 $\mathbf{m} \neq \mathbf{0}$，它的方向是在 **p** 傾向產生對 Q 的旋轉軸上。此軸同時垂直 **r** 與 **p**。

範例 3 (圖163)

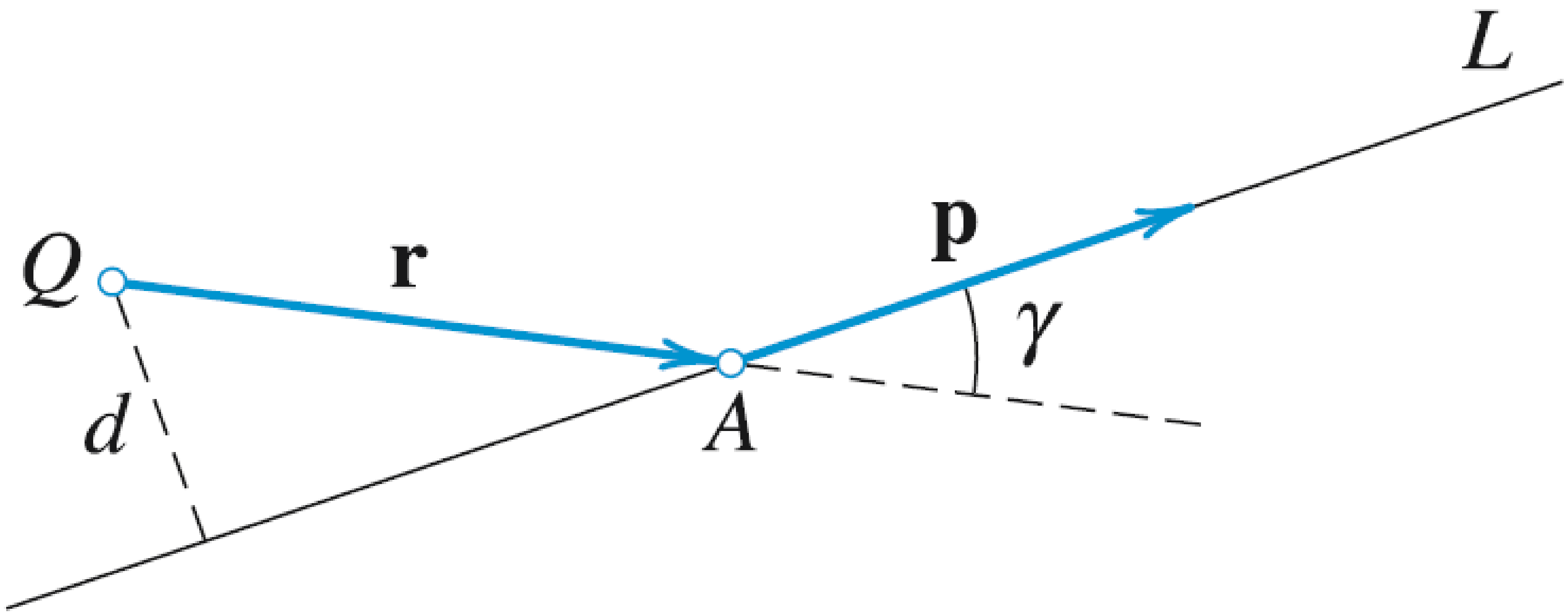

圖 163 p 力的力矩

範例 4 力矩

- 求圖164 中力 **p** 對輪中心點 Q 的力矩。

解 如圖164 所示亦定義座標，得

$$\mathbf{p} = [1000 \cos 30°,\ 1000 \sin 30°,\ 0] = [866, 500, 0], \qquad \mathbf{r} = [0,\ 1.5,\ 0].$$

（注意輪子中心在 y 軸上，座標 $y = -1.5$）故 (8) 式與 (2**) 式得

$$\mathbf{m} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 1.5 & 0 \\ 866 & 500 & 0 \end{vmatrix} = 0\mathbf{i} - 0\mathbf{j} + \begin{vmatrix} 0 & 1.5 \\ 866 & 500 \end{vmatrix} \mathbf{k} = [0, 0, -1299].$$

- 此力矩向量與輪子平面正交（垂直）；故此力傾向產生對此輪中心旋轉軸的方向。**m** 指向負 z 軸方向，即右手螺旋依該方式旋轉前進的方向。

範例 4 (圖164)

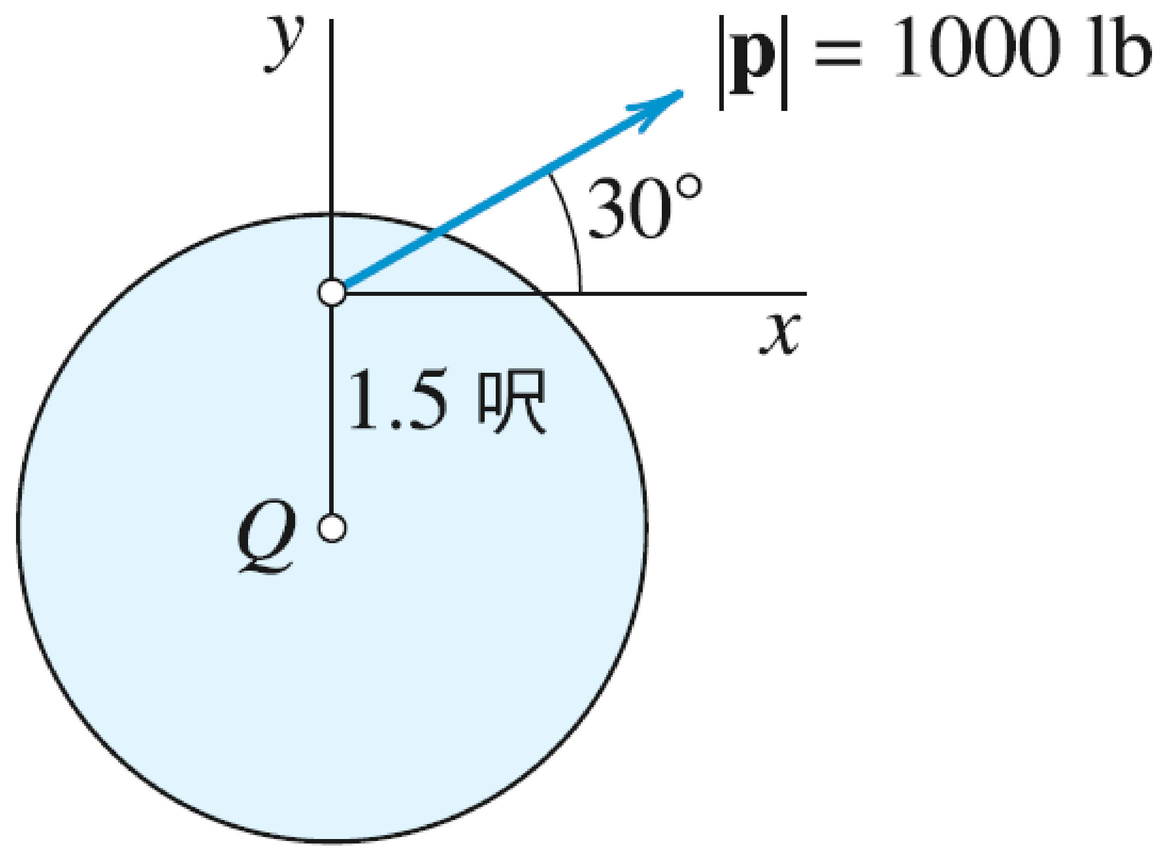

圖 164 p 力的力矩

範例 5 旋轉物體的速度

- 在空間中剛體 B 的旋轉可以用向量 $\mathbf{w}$ 作如下簡單而唯一的描述。$\mathbf{w}$ 的方向為旋轉軸的方向，以致於我們從 $\mathbf{w}$ 的起點到終點看此旋轉為順時針，$\mathbf{w}$ 的長度（大小）等於旋轉的**角速率**（angular speed）ω（>0），亦即，B 點的線（或切線）速率除以至旋轉軸的距離。

- 令 P 為 B 上任一點，而 d 為至轉軸的距離，則 P 的速率為 ωd，令 $\mathbf{r}$ 為其原點在轉軸上的座標系統所表示的 P 點**位置向量**（position vector）。那麼 $d = |\mathbf{r}| \sin \gamma$，其中$\gamma$ 為 $\mathbf{w}$ 與 $\mathbf{r}$ 的夾角。所以

$$\omega d = |\mathbf{w}|\,|\mathbf{r}| \sin \gamma = |\mathbf{w} \times \mathbf{r}|.$$

範例 5 (續)

- 由此式與向量的定義知，P 的速度向量 $\mathbf{v}$ 可表成下面形式（圖165）

(9) $$\mathbf{v}=\mathbf{w}\times\mathbf{r}$$

- 此簡單公式在求 B 中任意點的速度 $\mathbf{v}$ 蠻有用的。

範例 5 (圖165)

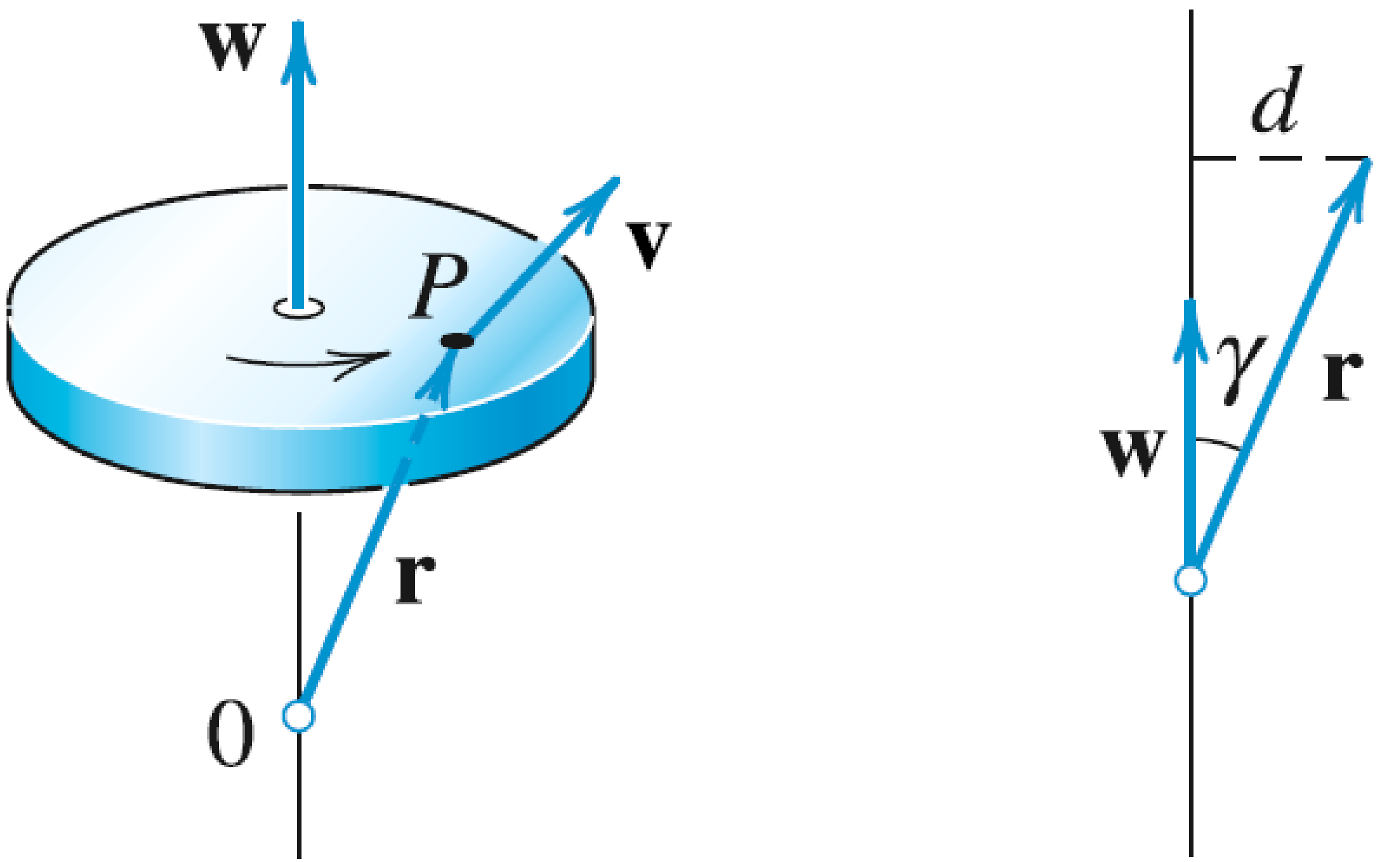

圖 165　剛體的旋轉

純量三重積（三向量的純量積）

- 超過兩個以上向量的最重要乘積是**純量三重積**（scalar triple product）或三個向量**a**、**b**、**c** 的**混合三重積**（mixed triple product），記為（**a b c**），且定義如下：

(10*)
$$\begin{aligned}\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) &= \mathbf{a}\cdot\mathbf{v} = a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3 \\ &= a_1\begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} + a_2\begin{vmatrix} b_3 & b_1 \\ c_3 & c_1 \end{vmatrix} + a_3\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}.\end{aligned}$$

- 根據點積知上式為純量，以分量 $\mathbf{a} = [a_1, a_2, a_3]$, $\mathbf{b} = [b_1, b_2, b_3]$, $\mathbf{c} = [c_1, c_2, c_3]$ 表示可將 (10*) 式寫成三階行列式。為此，我們令 $\mathbf{b} \times \mathbf{c} = \mathbf{v} = [\upsilon_1, \upsilon_2, \upsilon_3]$。然後再由分量表示的點積 [8.2 節 (2) 式]，以及將 **b** 與 **c** 取代 **a** 與 **b** 於 (2*) 式得到

(10)
$$(\mathbf{a} \quad \mathbf{b} \quad \mathbf{c}) = \mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

- 三向量的純量積之最重要性質如下：

定理 2 三向量的純量積之性質與應用

三向量的純量積之性質與應用

(a) (10) 式的點積與叉積可互換：

(11) $$(\mathbf{a}\quad\mathbf{b}\quad\mathbf{c}) = \mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = (\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{c}$$

(b) **幾何意義解說** (10) 式的絕對值 $|(\mathbf{a}\quad\mathbf{b}\quad\mathbf{c})|$ 是以 **a**、**b**、**c** 為邊向量（圖166）的平行六面體（斜方盒）體積。

(c) **線性獨立** 若且唯若 R^3 中三向量的純量積不是零，則此三向量為線性獨立。

定理 2 證明

- (a) 點積具交換性，使得 (10) 式為

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b})\cdot\mathbf{c} = \mathbf{c}\cdot(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}.$$

由此式得到將 (10) 式第 1 列與第 2 列互換的行列式，然後再互換第 2 列與第 3列，但是如此並未改變行列式值，是因為每一次互換產生「-1」因素（即負號），且$(-1)(-1) = 1$。此證完 (11) 式。

定理 2 證明

- (b) 此斜方盒體積等於其高 $h = |\mathbf{a}|\,|\cos\gamma|$（圖166）乘以基底面積，此面積是平行四邊形的邊 **b** 與 **c** 的面積 $|\mathbf{b} \times \mathbf{c}|$。故體積為

$$|\mathbf{a}||\mathbf{b} \times \mathbf{c}|\,|\cos \gamma| = |\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})| \qquad \text{（圖 166）}$$

如同 (11) 式的絕對值所得。

- (c) 三個非零向量，若令它們的起點重合，若且唯若它們不在同一平面（或不在同一直線上），則此三向量為線性獨立。此性質僅成立在 (b) 的三重積非零下，使得證線性獨立之依據條件（若其中一向量為零向量，則為零解）。

圖166 三向量之純量積的幾何解說

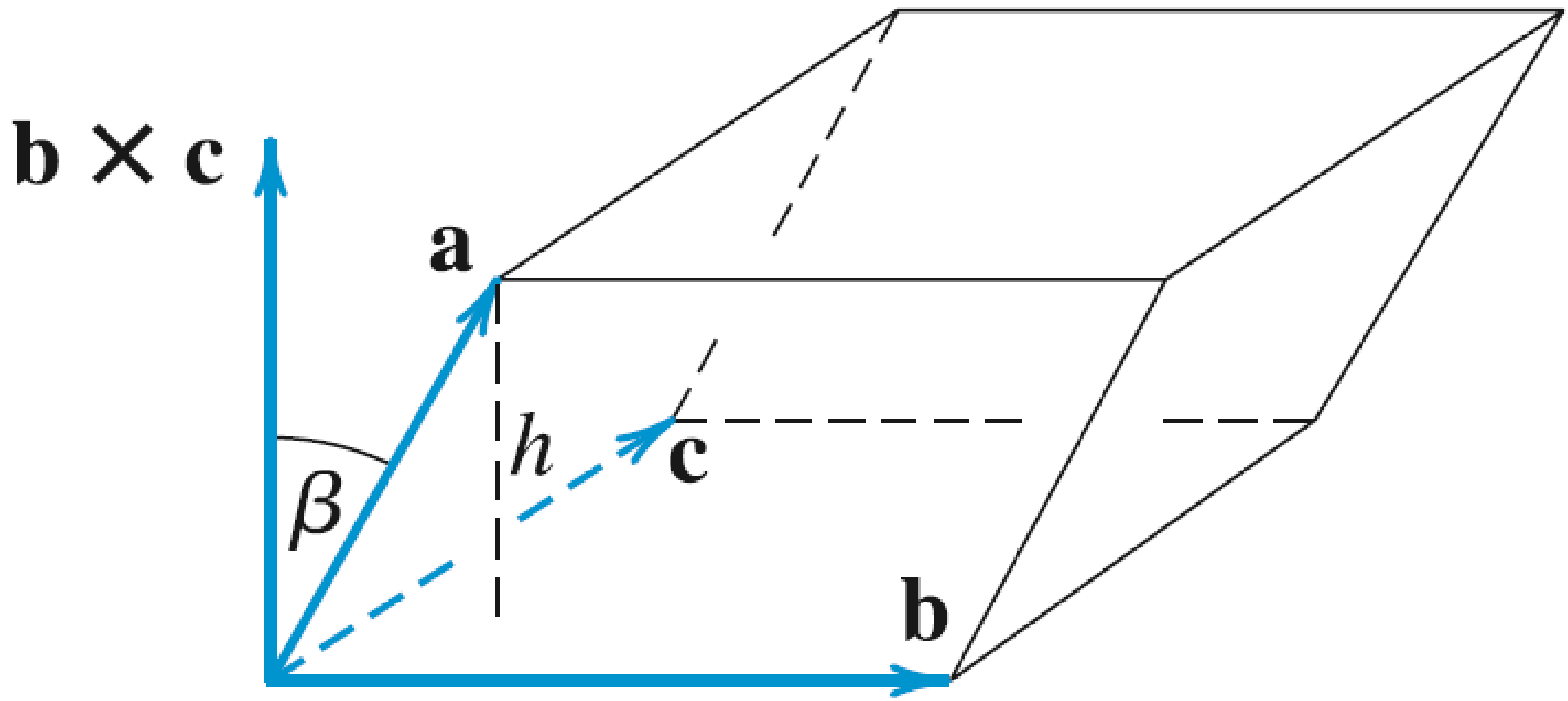

圖 166 三向量之純量積的幾何解說

範例 6　四面體

- 如圖167 所示，三個向量**a**、**b**、**c** 為邊的四面體，當**a** ＝ [2, 0, 3] , **b** ＝ [0, 4, 1] ,**c** ＝ [5, 6, 0] 時，求其體積。

解　平行六面體具有以上向量為邊長向量，其體積為此三向量的純量積之絕對值。

$$(\mathbf{a}\ \ \mathbf{b}\ \ \mathbf{c}) = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 1 \\ 5 & 6 & 0 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 6 & 0 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = -12 - 60 = -72.$$

- 因此 V ＝72，負號代表若該座標為右手系，則 **a**、**b**、**c** 三元組為左手系，四面體的體積是平行六面體之體積的　（你能證明嗎？），故為 12。
- 你能以原點為三向量的共同起點描繪此四面體嗎？其四個頂點的座標是什麼？