第 9 章　向量微分，梯度，散度，旋度

向量函數與純量函數

- 向量微分探討兩種函數，一為**向量函數**（vector functions），其值為向量

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}(P) = [v_1(P), v_2(P), v_3(P)]$$

- 且由空間 P 點而定；另一為**純量函數**（scalar functions），其值為純量

$$f = f(P)$$

- 也由 P 點而定。此處 P 為定義域內的點，定義域在應用時，可為三維區域或曲面或空間曲線。本節主張以向量函數定義**向量場**（vector field），而以純量函數定義在曲面或曲線定義域的**純量場**（scalar field）。將向量函數的例子示範在圖 168 至171。純量場的例子有物體的溫度場或地球大氣層

的空氣壓力場。向量與純量函數也與時間 t 或其它一些參數有關。

- **符號** 若引入笛卡兒座標 x、y、z，則可取代 $\mathbf{v}(P)$ 而寫為

$$\mathbf{v}(x, y, z) = [v_1(x, y, z), \quad v_2(x, y, z), \quad v_3(x, y, z)],$$

- 不過切記一點，分量取決於座標系統的選擇，然而，具有物理或幾何意義的向量場，其大小與方向應該只由 P 而定，而非座標選擇；同理，純量場的值（大小）$f(P) = f(x, y, z)$ 也類似。

圖168 曲線的切線向量場

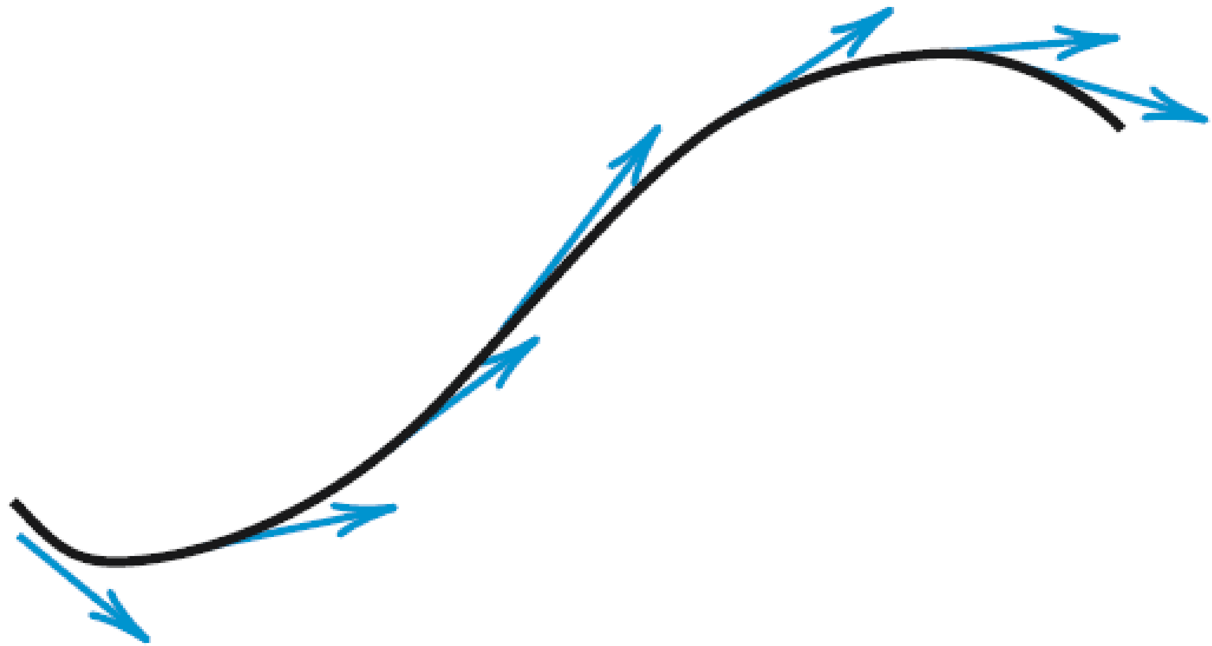

圖 168　曲線的切線向量場

圖169 曲線的法線向量場

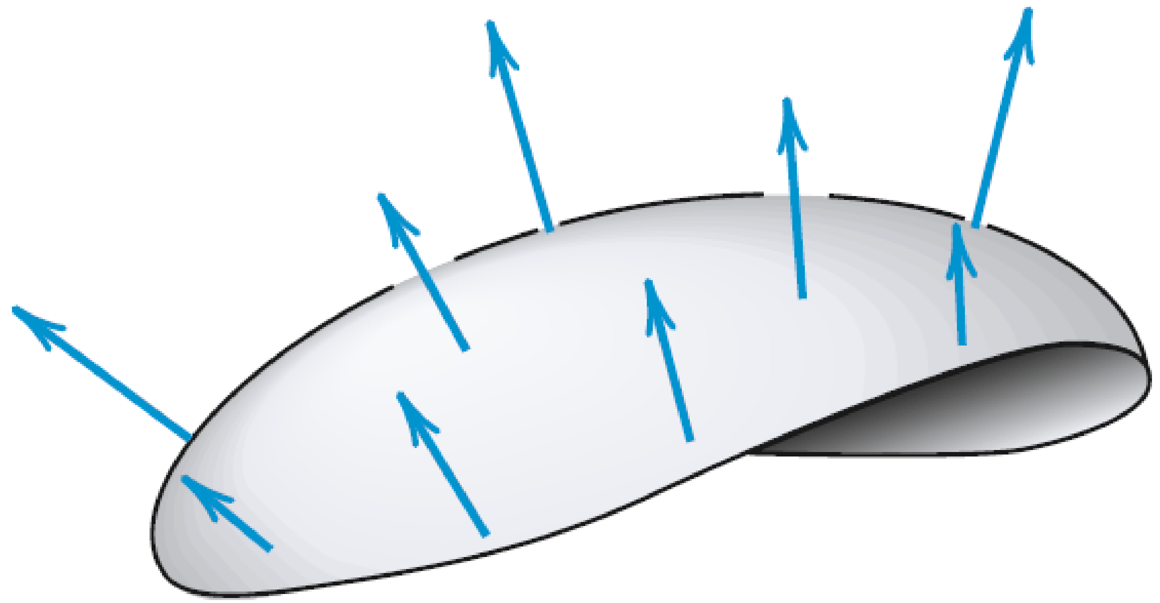

圖 169 曲面的法線向量場

範例 1　純量函數（空間的歐幾里得距離）

- 空間由一已知點 P_0 至任一點 P 的距離 $f(P)$ 是純量函數，其定義域為整個空間。$f(P)$ 定義為空間的純量場，若採笛卡兒座標系統且 P_0 座標為 x_0, y_0, z_0，則我們熟悉的距離公式 f 為

$$f(P) = f(x, y, z) = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}$$

- 其中 x、y、z 為 P 的座標。若以其它系統取代此固定直角座標系，使得此已知系統經過旋轉且平移而成另一系統，則一般來說，P 與 P_0 座標值會改變，但是 $f(P)$ 卻仍如先前保持相同值。通過 P 與 P_0 的直線，其方向餘弦並非純量，是因為方向餘弦值與選取的座標系統有關。

範例 2 向量場（速度場）

- 任意瞬間旋轉物體B 的速度向量 $\mathbf{v}(P)$ 構成向量場，稱為旋轉的**速度場**（velocity field）。若我們引入笛卡兒座標系統具有原點在旋轉軸上，則（見 8.3 節範例 5）

(1) $$\mathbf{v}(x, y, z) = \mathbf{w} \times \mathbf{r} = \mathbf{w} \times [x, y, z] = \mathbf{w} \times (x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k})$$

- 其中 x、y、z 為所考慮瞬間 $\boldsymbol{B}$ 物體上任一點 P 的座標。若使得此座標 z 軸為旋轉軸，且$\mathbf{w}$ 指向正 z 方向，則$\mathbf{w} = \omega\mathbf{k}$ 以及

$$\mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ x & y & z \end{vmatrix} = \omega[-y, x, 0] = \omega(-y\mathbf{i} + x\mathbf{j}).$$

- 旋轉物體的例子與對應的速度場呈現在圖170 上。

範例 2 （圖170）

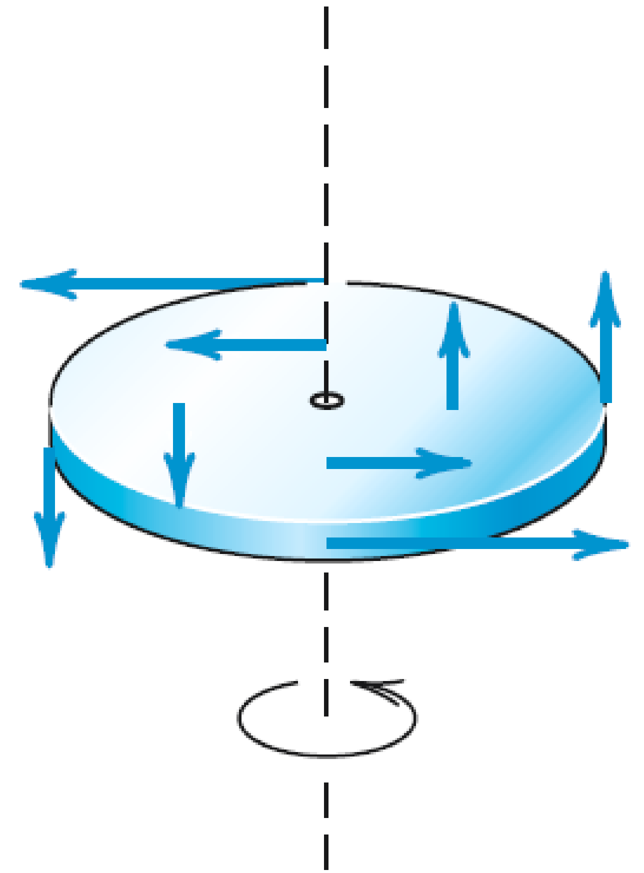

圖 170　旋轉物體的速度場

範例 3 向量場（力場，重力場）

令質量 M 的質點 A 固定在 P_0，與質量 m 的質點 B 可自由運動到空間不同位置點 P，那麼 A 吸引 B。根據**牛頓重力定律**（Newton's law of gravitation），此對應的重力 **p** 由 P 指向 P_0，而其大小正比 $1/r^2$，其中 r 為 P 與 P_0 的距離，即

(2) $$|\mathbf{p}| = \frac{c}{r^2}, \qquad c = GMm$$

此處 $G = 6.67 \cdot 10^{-8}\ \mathrm{cm^3/(gm \cdot sec^2)}$ 為萬有引力常數，因此 **p** 為空間中所定義向量場。若我們採笛卡兒座標使得 P_0 的座標為 x_0, y_0, z_0 以及 P 座標為 z, y, z，那麼由畢氏定理知

$$r = \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2} \qquad (\geqq 0).$$

範例 3（續）

- 假定 $r > 0$，且引進向量

$$\mathbf{r} = [x - x_0,\ y - y_0,\ z - z_0] = (x - x_0)\mathbf{i} + (y - y_0)\mathbf{j} + (z - z_0)\mathbf{k},$$

則得 $|\mathbf{r}| = r$，與 $(-1/r)\,\mathbf{r}$ 為 $\mathbf{p}$ 方向的單位向量；負號代表 $\mathbf{p}$ 是由 P 指向 P_0（圖171）。由此點與 (2) 式得

$$\begin{aligned}\mathbf{p} = |\mathbf{p}|\left(-\frac{1}{r}\mathbf{r}\right) &= -\frac{c}{r^3}\mathbf{r} = \left[-c\,\frac{x-x_0}{r^3},\quad -c\,\frac{y-y_0}{r^3},\quad -c\,\frac{z-z_0}{r^3}\right] \\ &= -c\,\frac{x-x_0}{r^3}\,\mathbf{i} - c\,\frac{y-y_0}{r^3}\,\mathbf{j} - c\,\frac{z-z_0}{r^3}\,\mathbf{k}.\end{aligned} \tag{3}$$

此向量函數描述作用在 B 的重力。

範例 3（圖171）

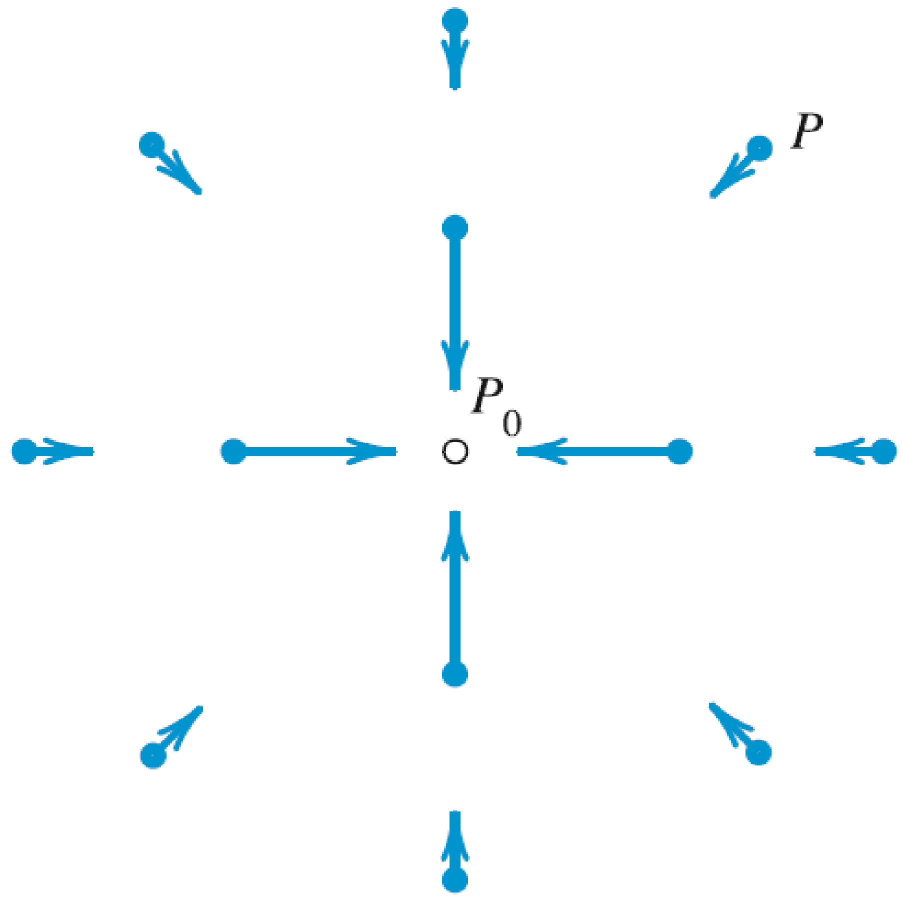

圖 171　範例 3 的重力場

向量微分

■ **收斂性**（convergence） 一無窮序列向量 $\mathbf{a}_{(n)}$, $n = 1, 2, \ldots$ 若存有一向量 $\mathbf{a}$ 使得

$$(4) \qquad \lim_{n \to \infty} \left| \mathbf{a}_{(n)} - \mathbf{a} \right| = 0.$$

則稱此序列向量為**收斂**（converge）；$\mathbf{a}$ 稱為此系列的**極限向量**（limit vector）。然後寫成

$$(5) \qquad \lim_{n \to \infty} \mathbf{a}_{(n)} = \mathbf{a}.$$

■ 對固定笛卡兒座標，若且唯若無窮序列向量的連續三個分量收斂至 $\mathbf{a}$ 的對應分量，則此序列向量收斂至 $\mathbf{a}$。

■ 同理，含實數變數 t 的向量函數 $\mathbf{v}(t)$，若其在 t_0 的一些鄰域（或許除了t_0點）定義為

(6) $$\lim_{t \to t_0} \left| \mathbf{v}(t) - \mathbf{l} \right| = 0.$$

則當 t 趨近於 t_0 時，此向量函數具有**極限值**（limit）$\mathbf{l}$，因此記為

(7) $$\lim_{t \to t_0} \mathbf{v}(t) = \mathbf{l}.$$

■ 此處，t_0 的鄰域為 t 軸含 t_0 為內部點（並非端點）的區間（線段）。

■ **連續性**（continuity） 向量函數 $\mathbf{v}(t)$ 若在 t_0（包括 t_0 本身）鄰域可被定義且成立

(8) $$\lim_{t \to t_0} \mathbf{v}(t) = \mathbf{v}(t_0).$$

則稱其為**連續**（continuous）。

- 若我們採笛卡兒座標系統，則可寫為

$$\mathbf{v}(t) = [v_1(t), v_2(t), v_3(t)] = v_1(t)\mathbf{i} + v_2(t)\mathbf{j} + v_3(t)\mathbf{k}.$$

- 那麼若且唯若 $\mathbf{v}(t)$ 的三個分量在 t_0 連續，則 $\mathbf{v}(t)$ 在 t_0 為連續。下面將陳述這些最重要的定義。

定義 向量函數的導數

向量函數的導數

若向量函數存在下列極限

(9)
$$\mathbf{v}'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbf{v}(t + \Delta t) - \mathbf{v}(t)}{\Delta t}.$$

則稱在 t 點為**可微分**（differentiable）。此向量 $\mathbf{v}'(t)$ 稱為 $\mathbf{v}(t)$ 的**導數**（derivative），見圖 172。

圖172 向量函數的導數

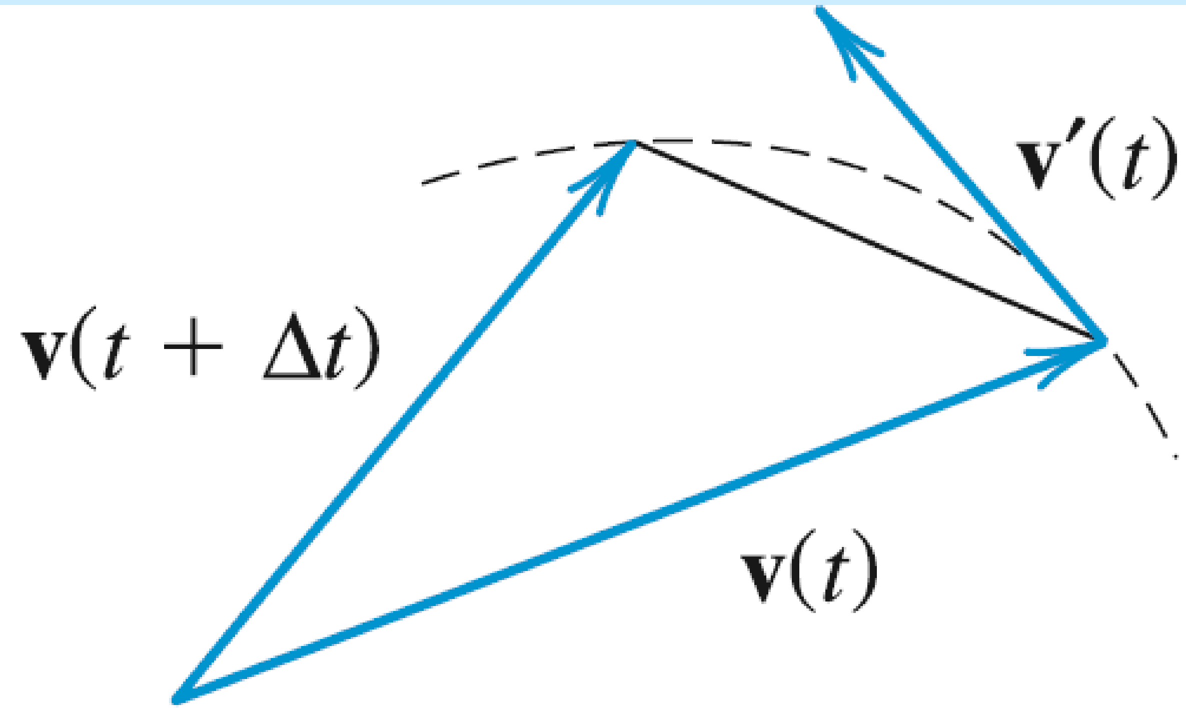

圖 172 向量函數的導數

■ 以固定笛卡兒座標系統表示的分量為

$$\mathbf{v}'(t) = [v_1'(t), \quad v_2'(t), \quad v_3'(t)]. \tag{10}$$

■ 因此導數 $\mathbf{v}'(t)$ 係分別對每一分量微分得到，例如，若 $\mathbf{v} = [t, t^2, 0,]$，則 $\mathbf{v}' = [1, 2t, 0]$。

■ 由 (9) 式推得方程式 (10)，以及反過來因為 (9) 式是微積分常用公式，它是單一變數函數導數的定義 [圖 172 的曲線是 (9) 式中 $\mathbf{v}(t)$ 在自變數 t 與 $t + \triangle t$ 區間，所表示 $\mathbf{v}(t)$ 終點的軌跡]。我們推知眾所熟悉的微分法則對微分向量函數而言仍然成立，例如

$$(c\mathbf{v})' = c\mathbf{v}' \qquad (c \text{ 為常數})$$

$$(\mathbf{u} + \mathbf{v})' = \mathbf{u}' + \mathbf{v}'$$

- 特別是

(11) $$(\mathbf{u}\bullet\mathbf{v})' = \mathbf{u}'\bullet\mathbf{v} + \mathbf{u}\bullet\mathbf{v}'$$

(12) $$(\mathbf{u}\times\mathbf{v})' = \mathbf{u}'\times\mathbf{v} + \mathbf{u}\times\mathbf{v}'$$

(13) $$(\mathbf{u}\quad\mathbf{v}\quad\mathbf{w})' = (\mathbf{u}'\quad\mathbf{v}\quad\mathbf{w}) + (\mathbf{u}\quad\mathbf{v}'\quad\mathbf{w}) + (\mathbf{u}\quad\mathbf{v}\quad\mathbf{w}').$$

- 此簡單證明留給同學。仔細察看 (12) 式中向量的次序，因為交叉乘積不具交換性。

範例 4 定值長度（大小）的向量函數導數

- 令 v(t) 是長度為常數的向量函數，例如說□**v**(t) □＝ c，那麼□**v**□^{2} ＝ **v** · **v** ＝ c^2，且微分[見(11) 式] 得□(**v** · **v**)’ ＝ 2**v** · **v**’ ＝ 0。此產生下列結果。定值長度的向量函數 **v**(t) 的導數，或為零向量或與 **v**(t) 垂直。。

向量函數的偏導數

- 目前討論顯示，含兩個或以上變數的向量函數，我們可對其**偏導數**（partial derivative）做如下介紹。假定向量函數的分量

$$\mathbf{v} = [v_1, \quad v_2, \quad v_3] = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k}$$

- 是含 n 變數 $t_1, \ldots, t_n$ 的可微分函數，那麼 $\mathbf{v}$ 對 t_m 的偏導數記為 $\partial\mathbf{v}/\partial t_m$，且定義為下列向量函數

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t_m} = \frac{\partial v_1}{\partial t_m}\mathbf{i} + \frac{\partial v_2}{\partial t_m}\mathbf{j} + \frac{\partial v_3}{\partial t_m}\mathbf{k}.$$

- 同理，二階偏導數為

$$\frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial t_l \partial t_m} = \frac{\partial^2 v_1}{\partial t_l \partial t_m}\mathbf{i} + \frac{\partial^2 v_2}{\partial t_l \partial t_m}\mathbf{j} + \frac{\partial^2 v_3}{\partial t_l \partial t_m}\mathbf{k},$$

- 依此類推。

範例 5 偏導數

若令 $\mathbf{r}(t_1, t_2) = a\cos t_1\,\mathbf{i} + a\sin t_1\,\mathbf{j} + t_2\mathbf{k}.$

則 $\dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial t_1} = -a\sin t_1\,\mathbf{i} + a\cos t_1\,\mathbf{j}$ 以及 $\dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial t_2} = \mathbf{k}.$