第 9 章 向量微分，梯度，散度，旋度

9.1 二度與三度空間向量
9.2 內積（點積）
9.3 向量積（叉積）
9.4 向量函數與純量函數，場，導數
9.5 曲線，弧長，曲率，扭率
9.6 微積分複習：多變數函數（選讀）
9.7 純量場的梯度，方向導數
9.8 向量場的散度
9.9 向量場的旋度

■ **參數**（parameter）t 來作**參數表示式**（parametric representations），t 可為時間或其它參數（見圖173）

(1) $$\mathbf{r}(t) = [x(t),\quad y(t),\quad z(t)] = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}.$$

此處 x、y、z 為笛卡兒座標（一般直線座標；見8.1 節），對每個 $t = t_0$ 值，C 點對應一位置向量為 $\mathbf{r}(t_0)$，亦即其座標為 $x(t_0), y(t_0), z(t_0)$ 。

■ 參數表示式 (1) 的關鍵優點勝過以在 xy 平面投影與在 xz 平面投影來表示曲線 C，即

(2) $$y = f(x), \qquad z = g(x)$$

（或藉 y 或 z 為獨立變數所表示的方程式對）這個優點是在 (1) 式中，x、y、z 均扮演相同的角色：此三個均是因變數。

數。再者，增加 t 的方向稱為在 C 點上的**正向**（positive sense），建立 C 的**方位**（orientation），沿著 C 行進的方向；t 減少的方向於是稱為 C 的**負向**（negative sense），而 C 由 (1) 式決定。

圖173 曲線的參數表示式

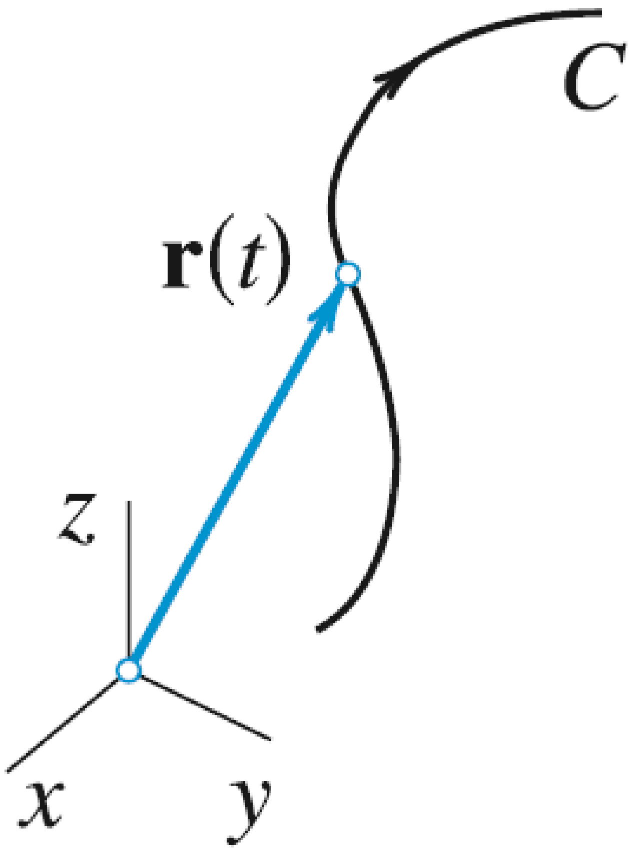

圖 173 曲線的參數表示式

範例 1 圓

- xy 平面上圓心為零與半徑為 2 的圓 $x^2+y^2 = 4, z = 0$ 可以參數表成

$\mathbf{r}(t) = [2\cos t, 2\sin t, 0]$　或簡單記為　$\mathbf{r}(t) = [2\cos t, 2\sin t]$　（圖 174）

- 其中 $0 \leqq t \leqq 2\pi$。的確，$x^2+y^2 = (2\cos t)^2+(2\sin t)^2 = 4(\cos^2 t+\sin^2 t) = 4$。當 $t = 0$ 時，得 $\mathbf{r}(0) = [2, 0]$；而 $t = \frac{1}{2}\pi$ 時，得 $\mathbf{r}(\frac{1}{2}\pi) = [0, 2]$，依此類推。由 (1) 表示式所建立的正向是逆時針方向。
- 若以 $t^* = -t$ 取代 t，得 $t = -t^*$ 與

$$\mathbf{r}^*(t^*) = [2\cos(-t^*), 2\sin(-t^*)] = [2\cos t^*, -2\sin t^*].$$

- 此具有相反方位，那麼此圓為順時針方位。

範例 1 (圖174)

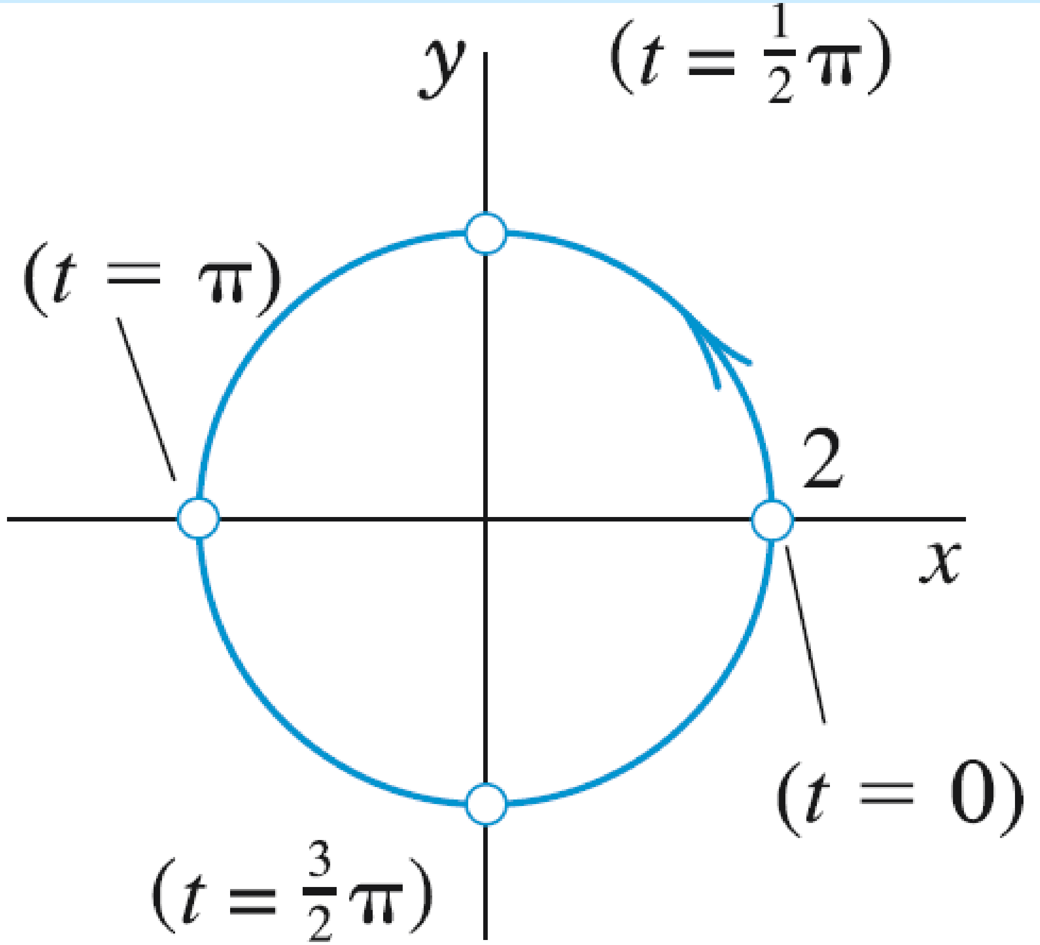

圖 174 範例 1 的圓

範例 2 橢圓

■ 向量函數

(3) $\mathbf{r}(t) = [a\cos t,\ \ b\sin t,\ \ 0] = a\ \cos t\ \mathbf{i}\ + b\ \sin t\ \mathbf{j}$ （圖 175）

■ 代表 xy 平面上橢圓，其中心在原點，而主軸在 x 軸與 y 軸方向。事實上，因 $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$，故由 (3) 式得

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \qquad z = 0.$$

■ 若 $b = a$，則 (3) 式代表半徑為 a 的圓。

範例 2 （圖175）

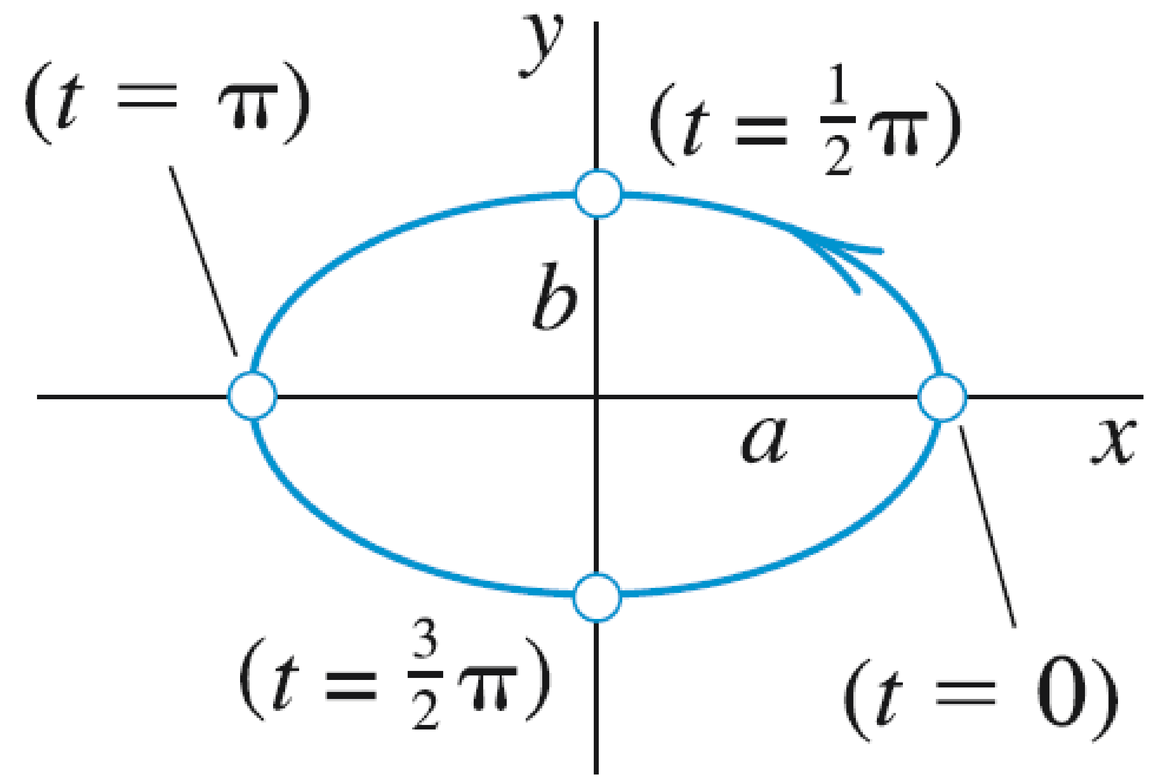

圖 175　範例 2 的橢圓

範例 3 直線

- 直線 L 通過位置向量為 **a** 的點 A，其方向為常數向量 **b** 的方向（見圖176），則可以參數表示成下面形式

(4) $\mathbf{r}(t) = \mathbf{a} + t\mathbf{b} = [a_1 + tb_1,\ a_2 + tb_2,\ a_3 + tb_3].$

若 **b** 是單位向量，它的分量是 L 的**方向餘弦**（direction cosines）。如此，|**t**| 為由 A 點至 L 上點距離的量度。

- 例如，xy 平面上斜率為 1 的直線通過 $A = (3, 2)$ 為（並描繪其圖）

$$\mathbf{r}(t) = [3,\ 2,\ 0] + t[1,\ 1,\ 0] = [3 + t,\ 2 + t,\ 0].$$

範例 3 （圖176）

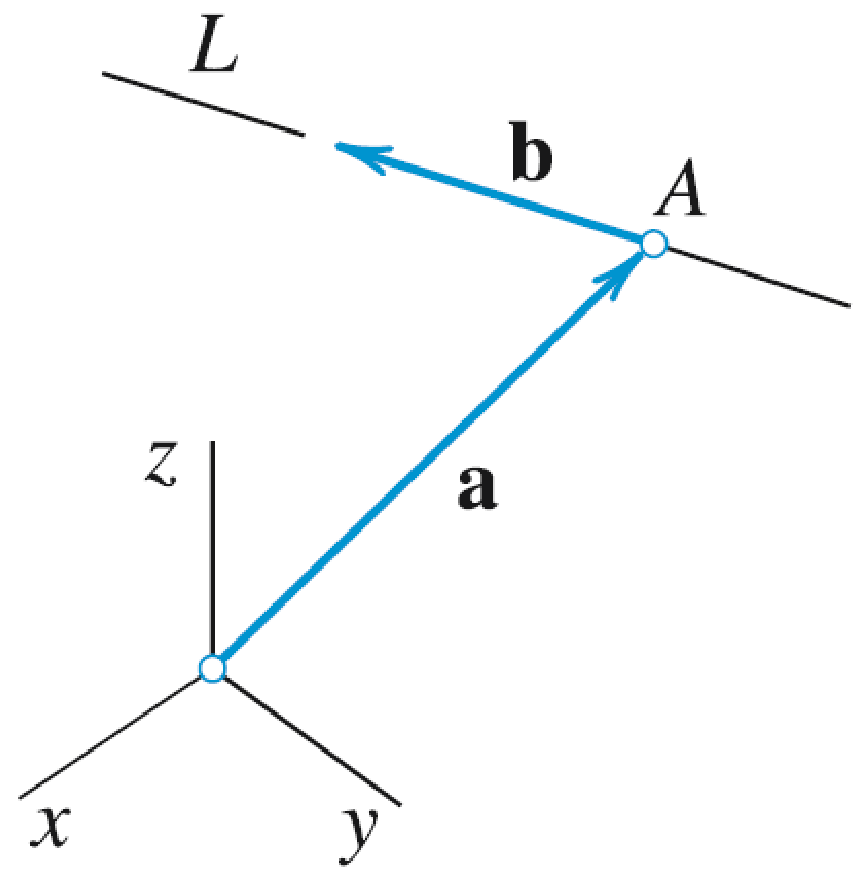

圖 176　直線的參數表示式

範例 4　圓柱螺旋線

- 如下向量函數表示的扭曲線 C。

(5) $\mathbf{r}(t) = [a \cos t,\ a \sin t,\ ct] = a \cos t\ \mathbf{i} + a \sin t\ \mathbf{j} + ct\ \mathbf{k} \qquad (c \neq 0)$

- 稱為圓柱螺旋線，它在圓柱表面上，$x^2+y^2 = a^2$。若 $c>0$，此圓柱螺旋線形狀像右手系螺旋（圖177）。若$c < 0$，它看起來像左手系螺旋（圖178）。若 $c = 0$，則 (5) 式為圓。

範例 4 (圖177, 178)

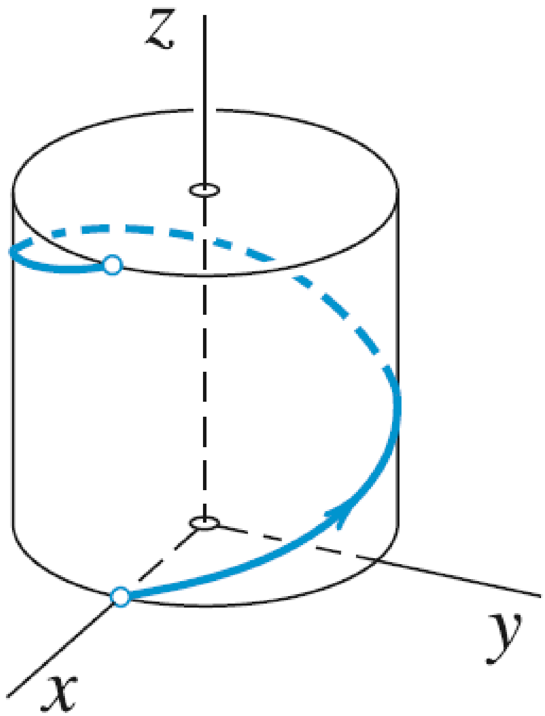

圖 177 右手圓柱螺旋線

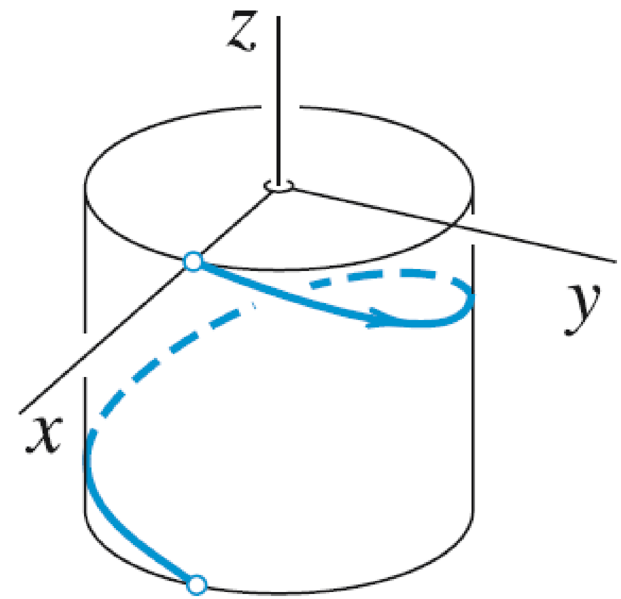

圖 178 左手圓柱螺旋線

■ **簡單曲線**（simple curve）為不具**多重點**（multiple points）的曲線，亦即，沒有曲線相交或自行接觸的點。圓與螺旋線為單一的，圖179 顯示的曲線並非單一的。有一例子是[sin 2*t*, cos *t*, 0]，你能描繪其草圖嗎？**曲線的弧**（arc of a curve）為曲線任兩點間的部分段。為簡化起見，我們稱呼「曲線」代表弧。

圖179 具多重點的曲線

圖 179 具多重點的曲線

曲線的切線

- 下一個觀念是以直線來近似曲線，則推導出**切線**（tangent）與曲線長度的定義。切線為恰接觸到曲線的直線。簡單曲線 C 在 C 上 P 點的切線是直線 L 通過 C 上 P 與 Q 點，且沿 C 線上當 Q 趨近 P 時，L 的極限位置。見圖180。
- 若以 $\mathbf{r}(t)$ 表示 C，且對應 t 與 $t+\Delta t$ 的 P 與 Q 點，則在 L 方向的向量為

(6) $$\frac{1}{\Delta t}[\mathbf{r}(t+\Delta t)-\mathbf{r}(t)].$$

- 在極限時，此向量變為導數

(7) $$\mathbf{r}'(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}[\mathbf{r}(t+\Delta t)-\mathbf{r}(t)],$$

■ 如果 **r**(t) 為可微分，此點是我們稍後的假設。若 **r**’(t) ≠ 0，稱 **r**’(t) 為在 P 點 C 的**切線向量**（tangent vector），此因它具有切線的方向之故，其對應單位向量為**單位切線向量**（unit tangent vector）（見圖180）

(8) $$\mathbf{u} = \frac{1}{|\mathbf{r}'|}\mathbf{r}'.$$

■ 注意，**r**’ 與 **u** 均指向 t 增加的方向，故它們的方向取決於 C 的方位。若我們將方位反過來，則它成為反向。

(9) $$\mathbf{q}(w) = \mathbf{r} + w\mathbf{r}'$$ （圖 181）

■ 這是 P 點的位置向量與 C 在 P 點的切線向量 **r**’ 常數倍之和。此兩向量均取決於 P 點，變數 w 是 (9) 式的參數。

圖180 曲線的切線

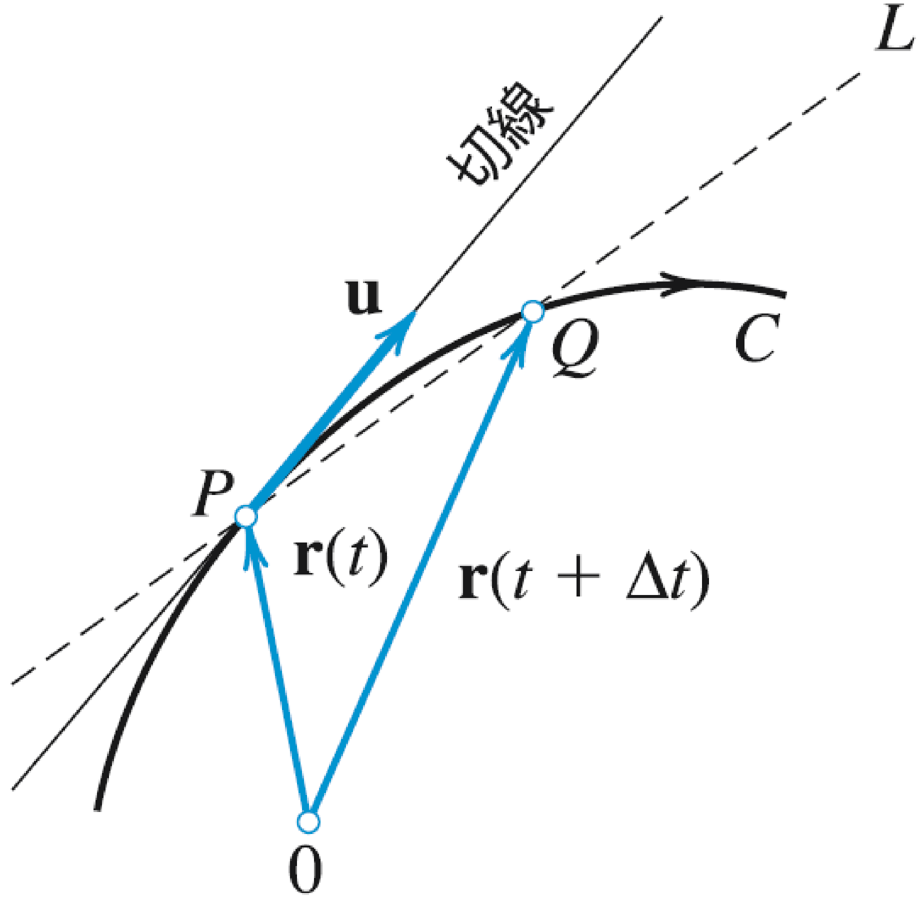

圖 180 曲線的切線

圖181 曲線的切線公式(9)

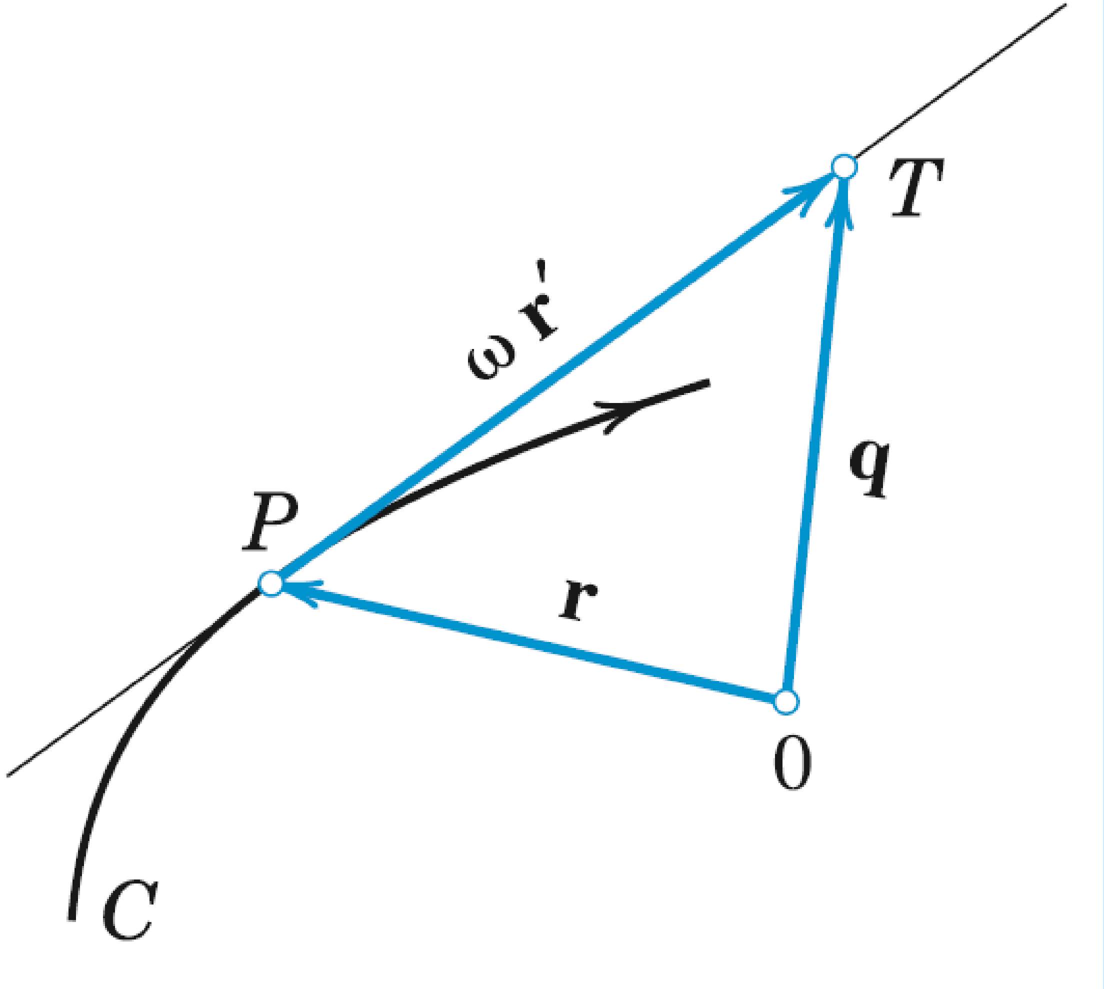

圖 181 曲線的切線公式 (9)

範例 5 橢圓的切線

- 求橢圓 $\frac{1}{4}x^2 + y^2 = 1$ 在點 $P: (\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ 的切線。

解 方程式 (3) 代入半軸長 $a = b$ 與 $b = 1$ 得到 $\mathbf{r}(t) = [2\cos t, \sin t]$，其導數為

$\mathbf{r}'(t) = [-2\sin t, \cos t]$。由於

$$\mathbf{r}(\pi/4) = [2\cos(\pi/4), \sin(\pi/4)] = [\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}]$$，知 P 對應 $t = \pi/4$

- 因此 $\mathbf{r}'(\pi/4) = [-\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}]$。由 (9) 式因此得到答案

$$\mathbf{q}(w) = [\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}] + w[-\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}] = [\sqrt{2}(1-w), (1/\sqrt{2})(1+w)].$$

- 描繪此橢圓與切線草圖以驗算結果。

曲線的長度

- 我們在此準備定義曲線的長度 l，l 將是 n 個弦（見圖182，其中 $n = 5$）的虛線長度當 n 愈來愈大時之極限，就此點令 $\mathbf{r}(t)$，$a \leqq t \leqq b$ 來代表 C 點。就每一個 $n = 1, 2, \ldots$，將區間 $a \leqq t \leqq b$ 藉下列點來細分

$$t_0\ (= a),\quad t_1,\quad \cdots,\quad t_{n-1},\quad t_n\ (= b),\qquad \text{其中}\qquad t_0 < t_1 < \cdots < t_n.$$

- 此造成具端點 $\mathbf{r}(t_0), \ldots, \mathbf{r}(t_n)$ 弦的虛線。我們任意細分以致於當 $n \to \infty$時，使得最大$|\Delta t_m| = |t_m - t_{m-1}|$趨近於零，這些弦的長度 $l_1, l_2, \ldots$可由畢氏定理獲得。若 $\mathbf{r}(t)$ 具有連續導數 $\mathbf{r}'(t)$，可證得此系列 $l_1, l_2, \ldots$具有極限。此極限與 C 表示式的特別選擇以及細分方式的選擇無關，此極限係由下列積分求得

(10) $$l = \int_a^b \sqrt{\mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}'}\, dt \qquad \left(\mathbf{r}' = \frac{d\mathbf{r}}{dt}\right).$$

- l 稱為 C 的長度，而 C 稱為**可求長**（rectifiable）曲線。

(10) 式在微積分上對平面曲線而言，表面上似乎有理。但一般而言，積分 (10) 式的實際計算並不容易。在習題中我們列出一些簡單的情況。

圖182 曲線的長度

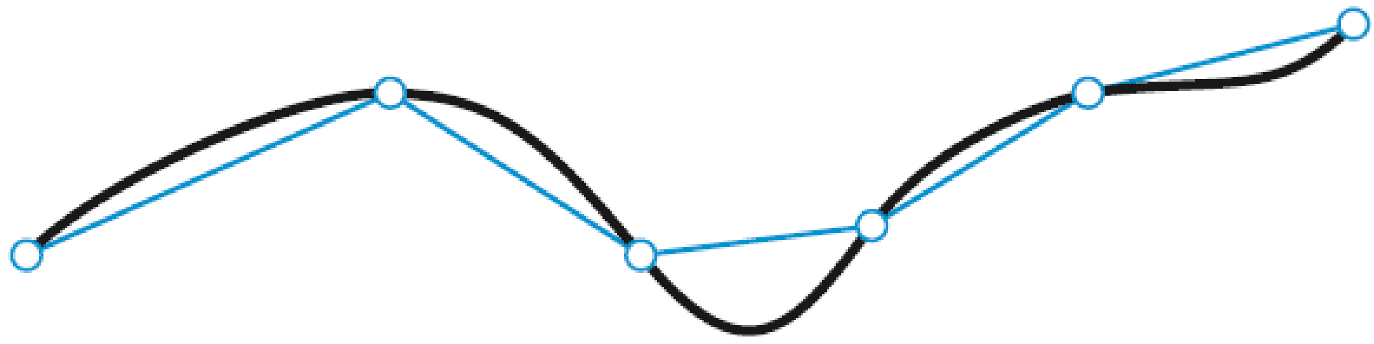

圖 182 曲線的長度

曲線的弧長 s

- 曲線 C 的長度 (10) 式為常數，正值。但若我們取代 (10) 式中固定 b 改以變數 t，則此積分變為 t 的函數，記為 $s(t)$ 且稱為**弧長函數**（arc length function），或簡稱 C 的**弧長**（arc length）。因此

(11) $$s(t) = \int_a^t \sqrt{\mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}'}\, d\tilde{t} \qquad \left(\mathbf{r}' = \frac{d\mathbf{r}}{d\tilde{t}}\right).$$

此處，積分變數記為 $\tilde{t}$，因此時在上限採用 t 之故。

- 幾何來說，在 $t_0 > a$ 時，$s(t_0)$ 為 C 在參數值 a 與 t_0 兩點間的弧長。a（點 $s=0$）的選擇是任意的；改變 a 即以常數改變 s。

線元素 ds

- 若我們對 (11) 式微分且兩次方，得

(12) $$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} = |\mathbf{r}'(t)|^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2.$$

通常習慣寫出

(13) $$d\mathbf{r} = [dx, dy, dz] = dx\,\mathbf{i} + dy\,\mathbf{j} + dz\,\mathbf{k}$$

與

(13*) $$ds^2 = d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} = dx^2 + dy^2 + dz^2.$$

- ds 稱為 C 的**線元素**（linear element）。

弧長當參數

■ 在 (1) 式使用 s 取代任意變數 t；可使各種公式較簡化。我們簡單地獲得單位切線向量 (8) 式為

(14) $$\mathbf{u}(s) = \mathbf{r}'(s).$$

■ 的確在 (12) 式 $|\mathbf{r}'(s)| = (ds/ds) = 1$ 證明 $\mathbf{r}'(s)$ 為單位向量。由於使用 s，甚至較大的簡化將出現在曲率與扭率（如下）。

範例 6 圓柱螺旋線，圓，弧長當做參數

- (5) 式螺旋線 $\mathbf{r}(t) = [a \cos t, a \sin t, ct]$ 導數為 $\mathbf{r}'(t) = [a \sin t, a \cos t, c]$。因此 $\mathbf{r}' \cdot \mathbf{r} = a^2 + c^2$ 為常數，記為 K^2。因此 (11) 式的被積分項為常數，等於 K 且其積分值是 $s = Kt$，故 $t = s/K$，使得此螺旋線的表示式採弧長 s 當參數為

(15) $$\mathbf{r}^*(s) = \mathbf{r}\left(\frac{s}{K}\right) = \left[a \cos\frac{s}{K},\ a \sin\frac{s}{K},\ \frac{cs}{K}\right], \qquad K = \sqrt{a^2 + c^2}.$$

- 若令 $c = 0$ 得一圓，則 $K = a, t = s/a$，以及採弧長 s 當參數的表示式為

$$\mathbf{r}^*(s) = \mathbf{r}\left(\frac{s}{a}\right) = \left[a \cos\frac{s}{a},\ a \sin\frac{s}{a}\right].$$

力學的曲線，速度，加速度

- 曲線在力學上扮演一基本角色，在其上曲線作為移動物體的路徑用，那麼如此曲線 C 必須採時間 t 為參數的參數表示式 $\mathbf{r}(t)$ 來描述。於是稱 C 的切線向量 (7) 式為**速度向量**（velocity vector）$\mathbf{v}$，由於與路徑相切，$\mathbf{v}$ 總是指向運動瞬時方向，且v 的長度為速率 $|\mathbf{v}| = |\mathbf{r}'| = \sqrt{\mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}'} = ds/dt$；(12)式。$\mathbf{r}(t)$ 的二階導數稱為**加速度向量**（acceleration vector），且記為 $\mathbf{a}$，它的長度 $|\mathbf{a}|$ 稱為運動的**加速度**（acceleration）。
- 故

(16)

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t), \qquad \mathbf{a}(t) = \mathbf{v}'(t) = \mathbf{r}''(t).$$

切線與法線加速度

- 另一方面，速度向量恆與運動的路徑相切，一般而言，加速度向量卻有另一方向，以至於它具有如下形式故

(17) $\mathbf{a} = \mathbf{a}_{切線} + \mathbf{a}_{法線}$，

其中**切線加速度向量**（tangential acceleration vector）$\mathbf{a}_{切線}$與路徑相切（或有時為 0），而**法線加速度向量**（normal acceleration vector）$\mathbf{a}_{法線}$與路徑正交（垂直）（或有時為0）。

- 藉鎖鏈法則，由 (16) 式可得 (17) 式向量的表示式，首先得

$$\mathbf{v}(t) = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}}{ds}\frac{ds}{dt} = \mathbf{u}(s)\frac{ds}{dt}$$

其中 **u**(s) 為單位切線向量 (14) 式。另一微分得

(18) $$\mathbf{a}(t)=\frac{d\mathbf{v}}{dt}=\frac{d}{dt}\left(\mathbf{u}(s)\frac{ds}{dt}\right)=\frac{d\mathbf{u}}{ds}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2+\mathbf{u}(s)\frac{d^2s}{dt^2}.$$

- 既然切線向量 **u**(s) 具有定值長度（大小為1），其導數 $d\mathbf{u}/ds$ 與 **u**(s) 垂直（根據 8.4 節範例 4），因此，(18) 式右邊第一項為法線加速度向量，右邊第二項為切線加速度向量，以致於 (18) 式具有 (17) 式的形式。
- 話說回來，$\mathbf{a}_{切線}$ 長度（大小）為 **a** 在 **v** 方向的投影，由 8.2 節 (11) 式 **b** = **v** 表示，亦即 $|\mathbf{a}_{切線}| = \mathbf{a}\cdot\mathbf{v}/|\mathbf{v}|$。因此，$\mathbf{a}_{切線}$ 為此大小表示式乘上在 **v** 方向的單位向量 $(1/|\mathbf{v}|)\,\mathbf{v}$，亦即

(18*) $$\mathbf{a}_{切線}=\frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{v}}{\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}}\mathbf{v}. \qquad \text{並且} \qquad \mathbf{a}_{法線}=\mathbf{a}-\mathbf{a}_{切線}$$

範例 7 向心加速度，離心力

- 向量函數

$$\mathbf{r}(t) = [R\cos\omega t,\ R\sin\omega t] = R\cos\omega t\,\mathbf{i} + R\sin\omega t\,\mathbf{j} \qquad \text{（圖 183）}$$

（具有固定 **i** 與 **j**）代表圓心在 *xy* 平面的原點；半徑為 *R* 的圓 *C* 以及描述質點（小物體）*B* 繞圓逆時針旋轉，將它微分得到速度向量

$$\mathbf{v} = \mathbf{r}' = [-R\omega\sin\omega t,\ R\omega\cos\omega t] = -R\omega\sin\omega t\,\mathbf{i} + R\omega\cos\omega t\,\mathbf{j} \qquad \text{（圖 183）}$$

- **v** 相切於圓 *C*。它的大小速率為

$$|\mathbf{v}| = |\mathbf{r}'| = \sqrt{\mathbf{r}'\cdot\mathbf{r}'} = R\omega.$$

範例 7（續）

故速率為常數，將速率除以與中心距離 R 稱為**角速率**（angular speed），它等於 ω，以致於角速率也為常數。若將速度向量微分，得加速度向量。

$$
(19) \quad \begin{aligned} \mathbf{a} = \mathbf{v}' &= [-R\omega^2 \cos \omega t, \ -R\omega^2 \sin \omega t] \\ &= -R\omega^2 \cos \omega t \, \mathbf{i} - R\omega^2 \sin \omega t \, \mathbf{j}. \end{aligned}
$$

■ 上式顯示 $\mathbf{a} = -\omega^2\mathbf{r}$（圖183），因此使得加速度朝向中心，稱為此運動的**向心加速度**（centripetal acceleration），它出現在速度向量以定變化率改變方向，向心加速度的大小為常數，$|\mathbf{a}| = \omega^2|\mathbf{r}| = \omega^2 R$，將 $\mathbf{a}$ 乘以 B 的質量得到**向心力**

範例 7 (續)

（centripetal force）$m\mathbf{a}$。其反向量 $-m\mathbf{a}$ 稱為**離心力**（centrifugal force）。在每一瞬間，此兩力呈平衡。

- 我們看到在這個運動加速度向量為正交（垂直）圓C，因此不具切線加速度。

範例 7 (圖183)

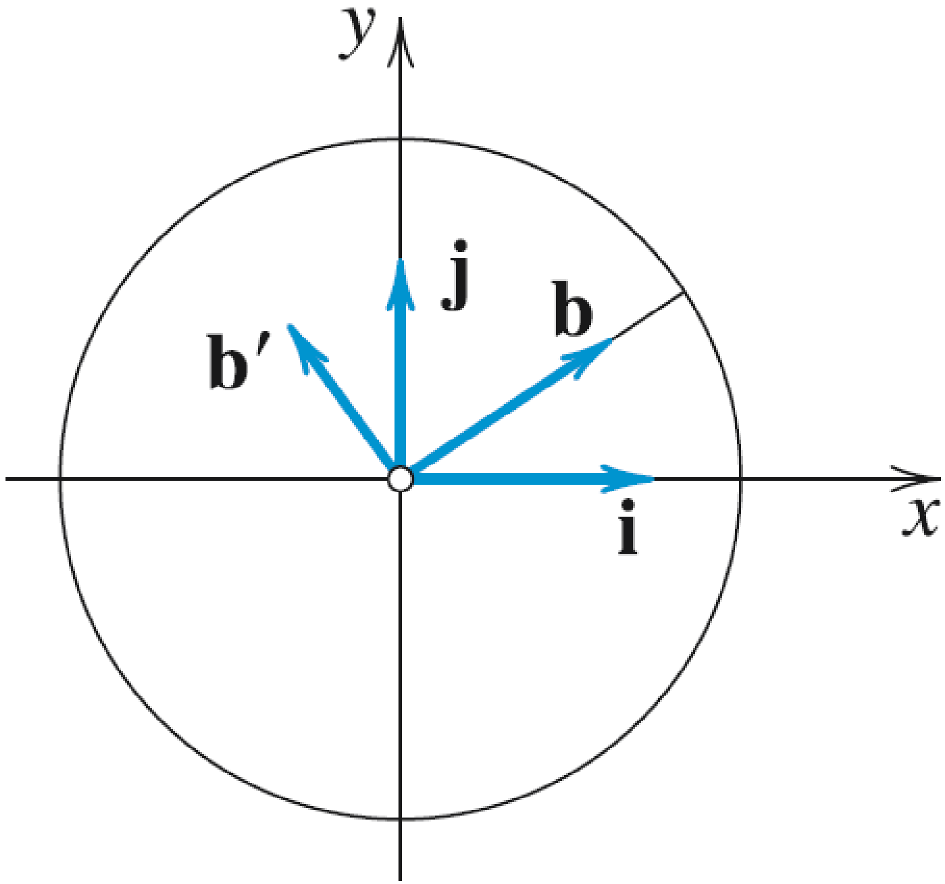

圖 183 向心加速度 a

範例 8 旋轉的疊加，柯氏加速度

- 一發射體以等速率沿著旋轉的地球（圖184）的某一子午線 *M* 飛行。求其加速度。

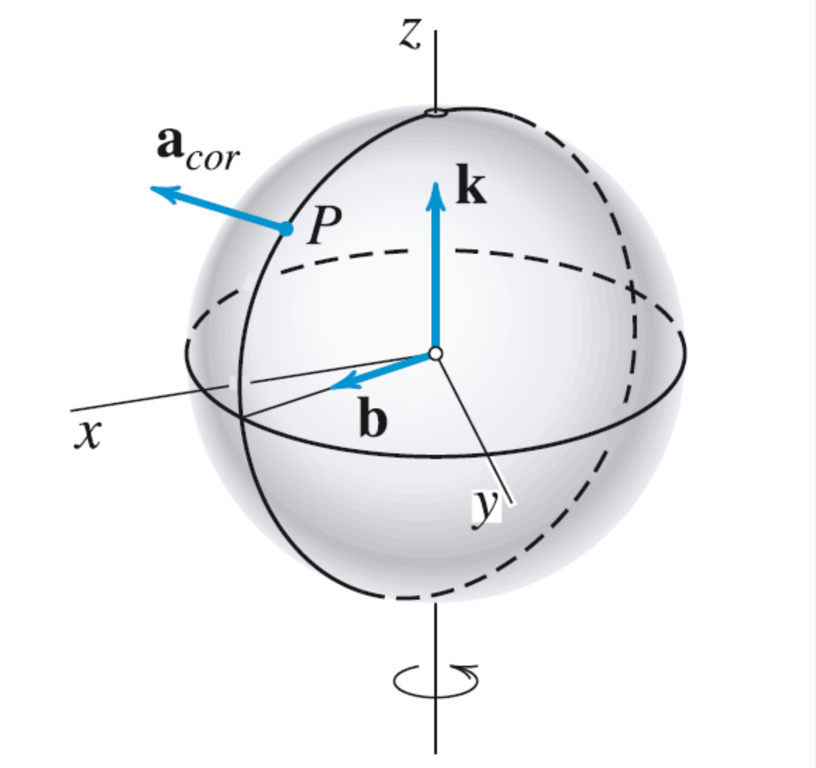

圖 184 範例 8 兩旋轉的疊加

範例 8 (續)

解 令 x、y、z 為空間固定的笛卡兒座標系，具單位向量 **i**、**j**、**k** 在各軸方向，令地球以角速率 $\omega > 0$（見範例 7）繞 z 軸旋轉且其單位向量為 **b**。因為 **b** 隨著地球旋轉，故具有下列形式

$$\mathbf{b}(t) = \cos \omega t \ \mathbf{i} + \sin \omega t \ \mathbf{j}.$$

- 令此發射體以等角速率 $\gamma > 0$ 在一由 **b** 與 **k** 所構成的平面上之子午線繞行。則其單位向量表成 **b** 與 **k** 形式如下：

$$\mathbf{r}(t) = R \cos \gamma t \ \mathbf{b}(t) + R \sin \gamma t \ \mathbf{k} \qquad (R = \text{地球半徑})$$

- 上式為我們要的模式，剩下來是計算，其結果會是令人意外的，且此與空中運行具相當關聯性。**b** 對 t 的一階與二階導數為

範例 8 (續)

(20)

$$\mathbf{b}'(t) = -\omega \sin \omega t \ \mathbf{i} + \omega \cos \omega t \ \mathbf{j}$$

$$\mathbf{b}''(t) = -\omega^2 \cos \omega t \ \mathbf{i} - \omega^2 \sin \omega t \ \mathbf{j} = -\omega^2 \mathbf{b}(t).$$

- $\mathbf{r}(t)$ 對 t 的一階與二階導數為

(21)

$$\mathbf{v} = \mathbf{r}'(t) = R \cos \gamma t \ \mathbf{b}' - \gamma R \sin \gamma t \ \mathbf{b} + \gamma R \cos \gamma t \ \mathbf{k}$$

$$\mathbf{a} = \mathbf{v}' = R \cos \gamma t \ \mathbf{b}'' - 2\gamma R \sin \gamma t \ \mathbf{b}' - \gamma^2 R \cos \gamma t \ \mathbf{b} - \gamma^2 R \sin \gamma t \ \mathbf{k}$$

$$= R \cos \gamma t \ \mathbf{b}'' - 2\gamma R \sin \gamma t \ \mathbf{b}' - \gamma^2 \mathbf{r}.$$

- 與範例 7 類比，且由於 (20) 式 **b”** ＝ －ω^2**b**，我們下結論，**a** 的第一項（涉及 **b”** 的 ω）是由於地球旋轉而產生的向心加速度。同理，最後一行的第三項（涉及γ的）是發射體在旋轉地球的子午線 *M* 上旋轉，所產生的向心加速度。

範例 8（續）

■ 第二項令人意外項 $-2\gamma R \sin \gamma t\, \mathbf{b}'$ 出現在 $\mathbf{a}$，稱為柯氏加速度（圖184），它是兩個旋轉交互作用產生的。在北半球，$\sin\gamma t > 0$（因 $t > 0$；而且假設$\gamma > 0$），因此 $\mathbf{a}_{柯氏}$的方向為 $-\mathbf{b}'$，亦即與地球旋轉方向相反。$|\mathbf{a}_{柯氏}|$ 在北極為最大，而在赤道為零，質量 m_0 的發射體 B 受到與 $m_0\, \mathbf{a}_{柯氏}$相反的力 $-m_0\, \mathbf{a}_{柯氏}$，而 $m_0\, \mathbf{a}_{柯氏}$傾向使 B 自子午線 M 偏向右（在南半球，其中 $\sin \gamma t < 0$，故偏向左）。我們已觀測到偏離發生在飛彈、火箭、砲彈與大氣層空氣流動上。

曲率與扭率（選讀）

- 在C 上點 P 位置的曲線 C：$\mathbf{r}(s)$（s 為弧長），其**曲率**（curvature）$\boldsymbol{\kappa}(s)$ 是量測在 P 點的單位切線向量 $\mathbf{u}(s)$ 的變化率 $|\mathbf{u}'(s)|$，因此，$\boldsymbol{\kappa}(s)$ 係量測曲線 C 在 P 點從直線（P 點切線）的偏離度。因為 $\mathbf{u}(s) = \mathbf{r}'(s)$，按定義知

(22) $$\kappa(s) = |\mathbf{u}'(s)| = |\mathbf{r}''(s)| \qquad (' = d/ds).$$

- C 在 P 點的**扭率**（torsion）$\tau(s)$ 係**密切平面**（osculating plane）O 的變化率量度（見圖185，密切面由 $\mathbf{u}$ 與 $\mathbf{u}'$ 構成的平面）。因此，$\tau(s)$ 係 C 在 P 點自平面（由平面 O 上 P 點）的偏離度，那麼此一變化率也以在平面 O 的法線向量 $\mathbf{b}$ 的導數 $\mathbf{b}'$ 來量度。根據向量積的定義 O 平面的單位法線向

量是 **b** ＝ **u** × (1/**κ**) **u**’ ＝ **u** × **p**，其中 **p** ＝ (1/**κ**) **u**’ 稱為**單位主法線向量**（unit principal normal vector），而 **b** 為曲線 *C* 在 *P* 的**單位副法線向量**（unit binormal vector）；見圖185。此處，我們必須假設**κ**≠ 0，故**κ**＞ 0。那麼扭率的絕對值定義為

(23*)

$$|\tau(s)| = |\mathbf{b}'(s)|.$$

■ 然而，**κ** 實際上扭率正負號由其「右手系」與「左手系」而定（見圖177，178）。此需要一些複雜計算。因為 **b** 是單位向量，故具有定值長度（大小）。因此 **b**□與 **b** 垂直（見8.4 節範例 4）。然後因內積定義知 **b** · **u** ＝ 0 與 **b** · **u**’ ＝ 0，故 **b**’ 也與 **u** 垂直。這使得下式成立

$$(\mathbf{b} \cdot \mathbf{u})' = 0; \quad 亦即， \quad \mathbf{b}' \cdot \mathbf{u} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{u}' = \mathbf{b}' \cdot \mathbf{u} + 0 = 0.$$

- 故若在 P 點 $\mathbf{b}' \neq 0$；它的方向必為 $\mathbf{p}$ 或 $-\mathbf{p}$，因此它必具有形式 $\mathbf{b}' = -\tau \mathbf{p}$，將此式與 $\mathbf{p}$ 取內積並利用 $\mathbf{p} \cdot \mathbf{p} = 1$ 得

(23) $$\tau(s) = -\mathbf{p}(s) \cdot \mathbf{b}'(s).$$

- 選取負號是為使右手系螺旋線的曲率為正，而使左手系螺旋線的曲率為負（圖177，178）。此單位正交向量的三元組 $\mathbf{u}$、$\mathbf{p}$、$\mathbf{b}$ 稱為 C 的**三面體**（trihedron）。圖185 亦顯示在 $\mathbf{u}$、$\mathbf{p}$、$\mathbf{b}$ 方向的三直線，名稱分別是**密切平面**（osculating plane），**法向平面**（normal plane）與**從切平面**（rectifying plane）的交線。

圖185 三面體，單位向量 u、p、b 與平面

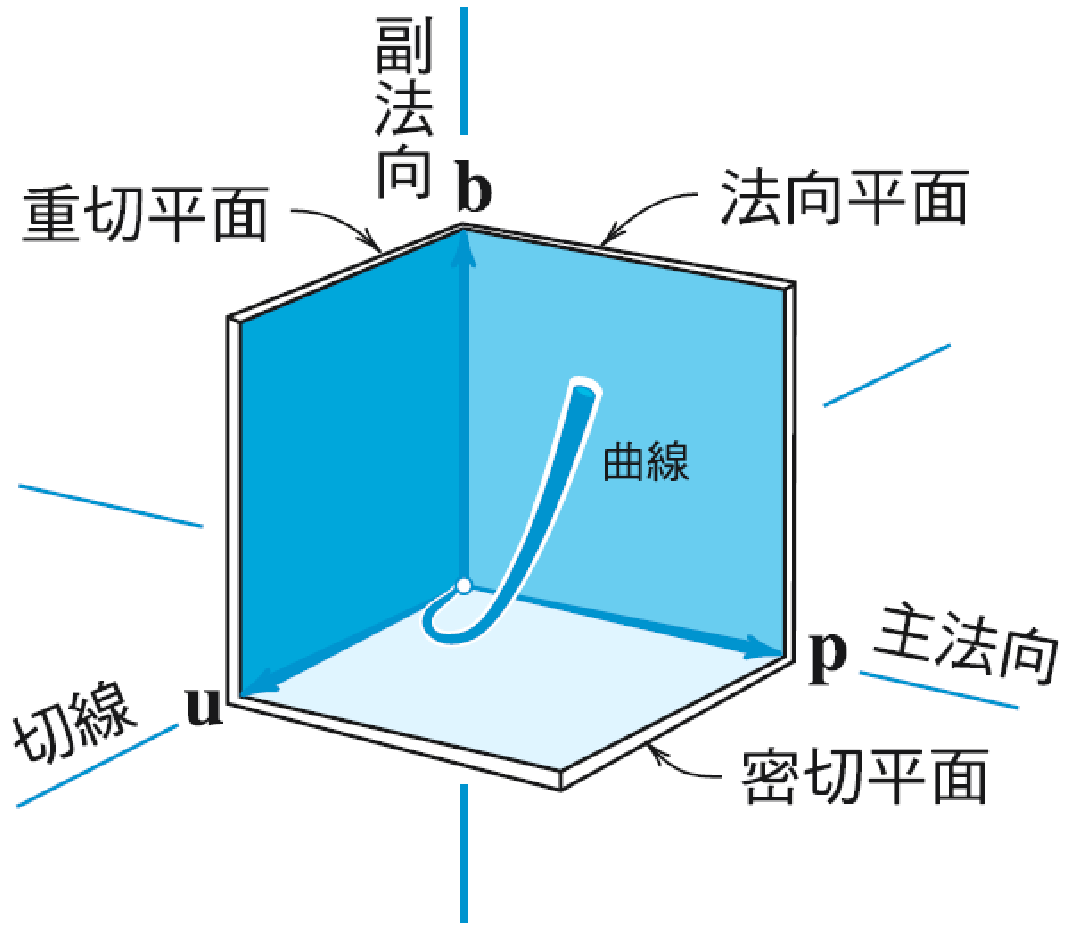

圖 185 三面體，單位向量 u、p、b 與平面