第 9 章 向量微分，梯度，散度，旋度

鎖鏈法則

- 圖186 顯示下列基本定理的標記法

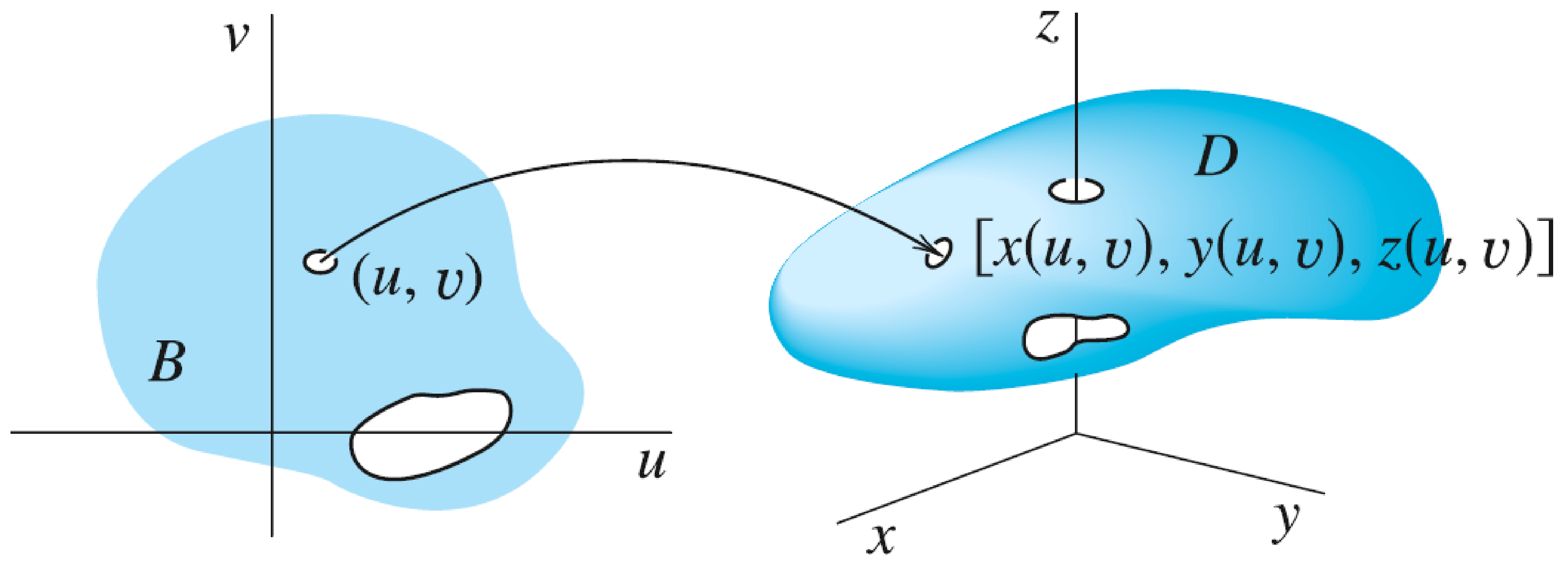

圖 186 定理 1 的標記法

定理 1　鎖鏈法則

鎖鏈法則

假設 $w = f(x, y, z)$ 在 xyz 空間的定義域 D 之中為連續且具有連續的一階偏導數。令 $x = x(u, v), y = y(u, v), z = z(u, v)$ 為連續函數，且在 uv 平面的定義域 B 具有一階偏導數，其中 B 被定義在每一點 (u, v) 對應於 D 中 $[x(u, v), y(u, v), z(u, v)]$ 點，見圖 186。則函數

$$w = f(x(u, v), y(u, v), z(u, v))$$

被定義在 B 上，且對 B 中 u 與 v 存在一階偏導數以及

(1)
$$\frac{\partial w}{\partial u} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial u}$$
$$\frac{\partial w}{\partial v} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial v}.$$

■ 本定理的**定義域**（domain）D 是 xyz 空間的開放性連通點集合，此處「連通」表示 D 的任意兩點可用很多線段組成的虛線來連接，而這些線段的點屬於 D，「開放性」表示 D 的每一點 P 均有鄰域（含中心P 的小圓球），鄰域的點均屬於 D。例如，一立方體或一橢圓球的內部（除去邊界面的實體）為定義域。

■ 在微積分對照於**自變數**（independent variables）u、υ與**因變數**（dependent variable）w，那麼，x, y, z 常常稱為**中間變數**（intermediate variables）。

具有實務重要性的特殊情況

- 若如同以前知 $w = f(x, y)$ 與 $x = x(u, \upsilon)$ ， $y = y(u, \upsilon)$，則 (1) 式變為

(2)
$$\frac{\partial w}{\partial u} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}$$
$$\frac{\partial w}{\partial \upsilon} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \upsilon} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \upsilon}.$$

- 若 $w = f(x, y, z)$，而 $x = x(t)$ ， $y = y(t)$ ， $z = z(t)$，則 (1) 式成為

(3)
$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{dz}{dt}.$$

■ 若 $w = f(x, y)$ ，且 $x = x(t)$ ， $y = y(t)$ ，則 (3) 式簡化成

(4) $$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{dy}{dt}.$$

■ 最後，簡單的情況 $w = f(x)$ ， $x = x(t)$，得

(5) $$\frac{dw}{dt} = \frac{dw}{dx}\frac{dx}{dt}.$$

範例 1 鎖鏈法則

■ 若 $w = x^2 - y^2$，且以極座標 r、θ 定義為 $x = r\cos\theta$，$y = r\sin\theta$，則 (2) 式成為

$$\frac{\partial w}{\partial r} = 2x\cos\theta - 2y\sin\theta = 2r\cos^2\theta - 2r\sin^2\theta = 2r\cos 2\theta$$

$$\frac{\partial w}{\partial \theta} = 2x(-r\sin\theta) - 2y(r\cos\theta) = -2r^2\cos\theta\sin\theta - 2r^2\sin\theta\cos\theta = -2r^2\sin 2\theta.$$

定理 2 均值定理

均值定理

假設 $f(x, y, z)$ 在 xyz 空間的定義域 D 內為連續且具有一階偏導數。令P_0：(x_0, y_0, z_0) 與 P：(x_0+h, y_0+k, z_0+l) 為 D 內的點，使得直線段 P_0P 連接這些其中點均落在定義域內，則

$$
f(x_0+h, y_0+k, z_0+l) - f(x_0, y_0, z_0) = h\frac{\partial f}{\partial x} + k\frac{\partial f}{\partial y} + l\frac{\partial f}{\partial z}, \tag{6}
$$

此偏導數是以此線段中某一合適點計算的。

特殊情況

- 對兩變數函數 $f(x, y)$ 而言（滿足定理內假設），公式 (6) 簡化成（圖187）

(7) $$f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) = h\frac{\partial f}{\partial x} + k\frac{\partial f}{\partial y},$$

- 至於單一變數函數 $f(x)$，(6) 式變為

(8) $$f(x_0 + h) - f(x_0) = h\frac{df}{dx},$$

- 其中 (8) 式中定義域 D 為 x 軸的線段，且導數是在 x_0 與 $x_0 + h$ 間某一適當的點計算的。

圖187 兩變數函數的均值定理 [公式 (7)]

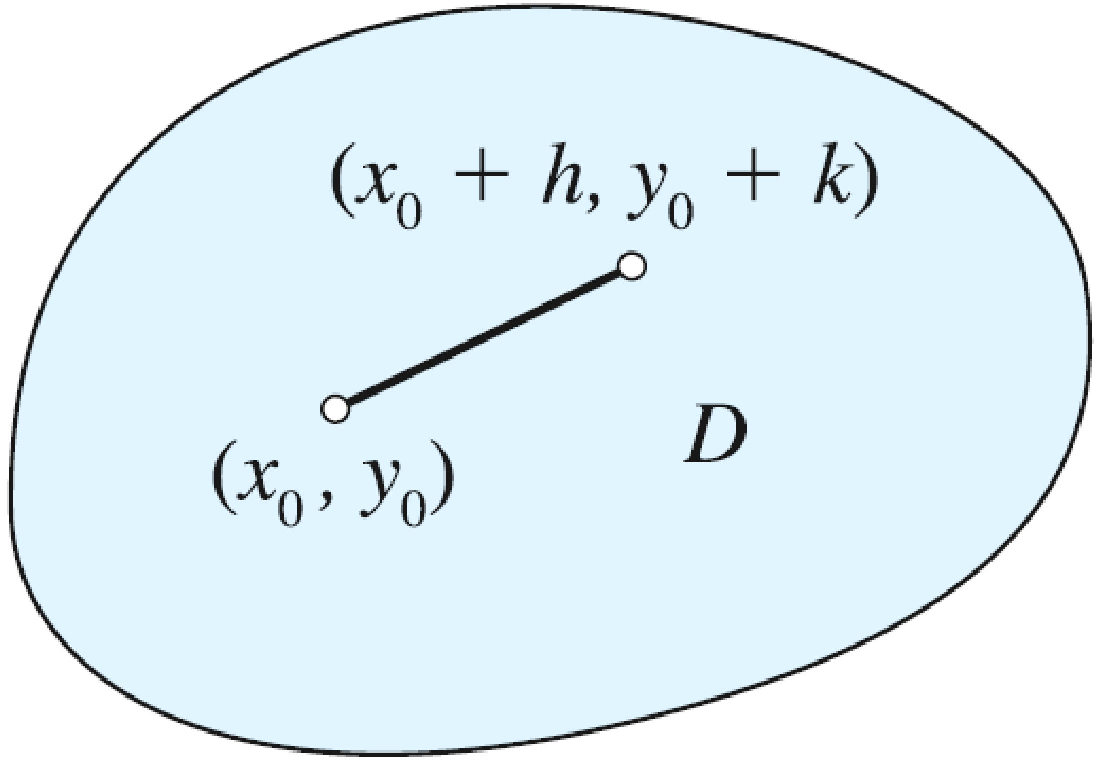

圖 187 兩變數函數的均值定理 [公式 (7)]