第 9 章 向量微分，梯度，散度，旋度

9.1 二度與三度空間向量
9.2 內積（點積）
9.3 向量積（叉積）
9.4 向量函數與純量函數，場，導數
9.5 曲線，弧長，曲率，扭率
9.6 微積分複習：多變數函數（選讀）
9.7 純量場的梯度，方向導數
9.8 向量場的散度
9.9 向量場的旋度

向量場的散度

- 首先假設 **v**(x, y, z) 為可微分向量函數，其中 x、y、z 為直角座標，而令 v_1、v_2、v_3 為 **v** 的分量。那麼此函數

(1) $$\operatorname{div} \mathbf{v} = \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial v_3}{\partial z}$$

稱為 **v** 的**散度**（divergence），或由 **v** 定義的向量場散度。

- 例如，若

$\mathbf{v} = [3xz,\ 2xy,\ -yz^2] = 3xz\,\mathbf{i} + 2xy\,\mathbf{j} - yz^2\,\mathbf{k},$ 則 $\operatorname{div} \mathbf{v} = 3z + 2x - 2yz.$

- 散度的另一共同記號為

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = \nabla \cdot \mathbf{v} = \left[\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right] \cdot [v_1, v_2, v_3]$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial x}\,\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\,\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\,\mathbf{k}\right) \cdot (v_1\,\mathbf{i} + v_2\,\mathbf{j} + v_3\,\mathbf{k})$$

$$= \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial v_3}{\partial z},$$

- 附帶說明，在點積中 $(\partial/\partial x)v_1$ 的「積」，表示偏導數 $\partial v_1/\partial x$ 等。此為再簡單不過的方便記號。注意，$\nabla \cdot \mathbf{v}$ 表示純量 div **v**，而 ∇f 表示向量 grad f，已在 8.7 節定義過。

- 在下面範例 2 我們將明白散度具有重要物理意義。很清楚地，描述物理或幾何性質的函數值必定與座標的特殊選擇無關；亦即，這些函數值對座標轉換下必為不變的，所以，下列定理應該成立。

定理 1　散度的不變性

散度的不變性

散度 div **v** 為純量函數，亦即，其值取決於空間所在點（而且，當然在 **v** 上）；並不取決於 (1) 式中座標的選擇，所以對其它直角座標 x^*、y^*、z^*，以及 **v** 的對應分量 $v_1{}^*$、$v_2{}^*$、$v_3{}^*$

$$\text{(2)} \qquad \operatorname{div} \mathbf{v} = \frac{\partial v_1{}^*}{\partial x^*} + \frac{\partial v_2{}^*}{\partial y^*} + \frac{\partial v_3{}^*}{\partial z^*} \ .$$

■ 此刻我們回到更迫切實際的工作，以體驗散度意義如下。設 $f(x, y, z)$ 為兩次可微分的純量函數，那麼存在梯度，

$$\mathbf{v} = \operatorname{grad} f = \left[\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right] = \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{k}$$

然後再微分一次，第一項分量對 x 微分，第二項對 y 微分，第三項對 z 微分，因此構成散度，

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = \operatorname{div}\,(\operatorname{grad}\, f) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}.$$

■ 因此得到基礎結果，即梯度的散度是拉普拉斯運算（8.7 節），

(3) $$\operatorname{div}\,(\operatorname{grad}\, f) = \nabla^2 f.$$

範例 1 重力，拉普拉斯方程

■ 在前一節定理 3 的重力 **p** 是純量函數 $f(x, y, z) = c/r$ 的梯度其中 f 滿足拉普拉斯方程 $\nabla^2 f = 0$。根據 (3) 式，此式（$\nabla^2 f = 0$）意指 $\operatorname{div} \mathbf{p} = 0$（$r > 0$）。

範例 2　可壓縮流體的流動，散度的物理意義

- 我們探討在 R 區域內不具**源點**（sources）或**匯點**（sinks），亦即產生或消滅流體的點的流體流動。**流體狀態**（fluid state）的觀念意涵氣體與汽體，在侷限意義下的流體或**液體**（liquids）（例如，水或油）具甚小可壓縮性，在許多問題可忽略壓縮性。而氣體或汽體具有較大壓縮性；亦即，它們的密度ρ（＝單位體積的質量）取決於空間的座標 x、y、z（也可由時間決定）。在此假設流體是可壓縮的。
- 我們考慮流動經過平行座標軸（圖191）微小邊長Δx、Δy、Δz 的長方形箱區 B [Δ是很小量的標準符號；當然是與 8.7 節 (11) 式拉普拉斯運算子符號無關]。此箱 B 體積$\Delta V = \Delta x \Delta y \Delta z$。令

$$\mathbf{v} = [v_1, v_2, v_3] = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k}$$

範例 2 (續)

向量。並令

(4) $$\mathbf{u} = \rho\mathbf{v} = [u_1,\ u_2,\ u_3] = u_1\,\mathbf{i} + u_2\,\mathbf{j} + u_3\,\mathbf{k}$$

- 且假設 **u** 與 **v** 為 x、y、z 與 t 的連續可微分之向量函數（亦即，它們的一階偏導數為連續）。我們以考慮邊界面的**流通量**（flux），亦即單位時間離開 B 的質量總減少，來計算箱 B 內含質量的變化率。考慮流經 B 可在圖 191 見到的三個面中左面，其面積為$\Delta x\Delta z$。因為向量$\upsilon_1\mathbf{i}$ 與 $\upsilon_3\mathbf{k}$ 平行該平面，**v** 的分量 υ_1 與 υ_3 並不會帶來質量於流動中，因此短期Δt 期間進入該面的流體質量大致為

$$(\rho v_2)_y\ \Delta x\,\Delta z\,\Delta t\ = (u_2)_y\ \Delta x\ \Delta z\ \Delta t,$$

範例 2 (續)

- 其中下標 y 表示此式指著左面而言，在同一期間下，流體穿過相反一面離開箱 B 的質量約為 $(u_2)_{y+\Delta y}\ \Delta x\ \Delta z\ \Delta t$，其中下標 $y+\Delta y$ 顯示此式是指右面（在圖191 看不到）。左右面差值為大致質量減少

$$\Delta u_2\, \Delta x\, \Delta z\, \Delta t = \frac{\Delta u_2}{\Delta y}\, \Delta V \Delta t \quad [\Delta u_2 = (u_2)_{y+\Delta y} - (u_2)_y]$$

- 兩類似表示式係考慮 B 其它兩個平行面對求得。若將這三個（x、y、z 面）表示式加起來，求得在Δt 期間 B 內總質量減少約為

$$\left(\frac{\Delta u_1}{\Delta x} + \frac{\Delta u_2}{\Delta y} + \frac{\Delta u_3}{\Delta z}\right) \Delta V\ \Delta t,$$

範例 2 (續)

其中

$$\Delta u_1 = (u_1)_{x+\Delta x} - (u_1)_x \qquad 和 \qquad \Delta u_3 = (u_3)_{z+\Delta z} - (u_3)_z .$$

- B 的質量減少係其密度對時間變化率，因而等於

$$-\frac{\partial \rho}{\partial t} \Delta V \, \Delta t.$$

- 若使兩式相等，將結果方程除以$\Delta V \Delta t$，並令Δx、Δy、 Δz 與Δt 趨近於零，則得到

$$\text{div } \mathbf{u} = \text{div}(\rho \mathbf{v}) = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

或

(5)
$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \mathbf{v}) = 0.$$

範例 2 (圖 191)

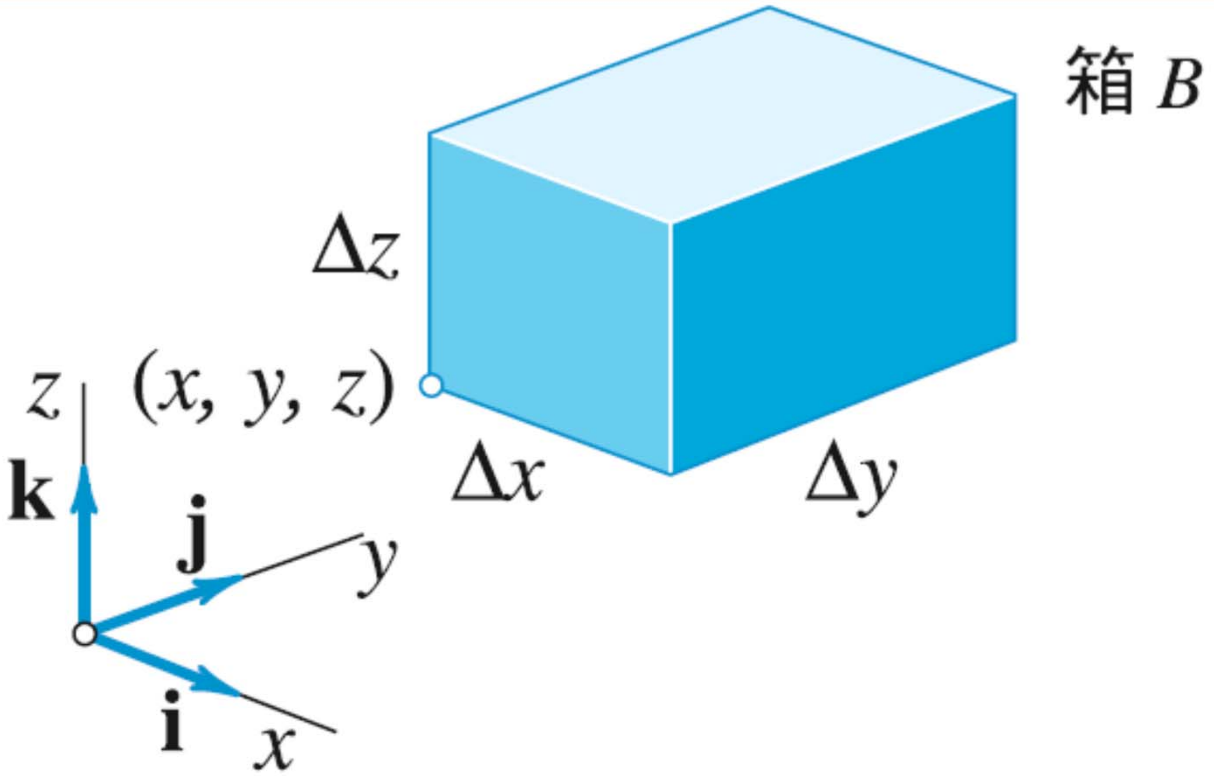

圖 191 散度的物理解說

範例 2 (續)

■ 此一重要關係式稱為質量守恆的條件，或可壓縮流體流動的**連續性方程**（continuity equation）。若流動為**穩態**（steady），亦即，與時間無關，則 $\partial\rho/\partial t = 0$ 以及連續方程式為

(6) $$\operatorname{div}(\rho\mathbf{v}) = 0.$$

■ 若密度ρ為常數，所以流體為不可壓縮，方程式 (6) 變為

(7) $$\operatorname{div}\,\mathbf{v} = 0.$$

■ 此關係式為我們所知的**不可壓縮的條件**（condition of incompressibility），此表達一事實，即對一個固定單位體積

範例 2 (續)

元素的流出與流入之平衡，在任何時間是零。很清楚的地，假設在 R 區內無源點或匯點的流動是此結論的必要條件。

- 從以上討論，你應該可獲得結論且記得，大致說來，**散度係流出減去流入量的量度**（the divergence measures outflow minus inflow）。