第 9 章 向量微分，梯度，散度，旋度

向量場的旋度

- 假設 $\mathbf{v}(x, y, z) = [v_1, v_2, v_3] = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k}$ 為直角座標 x, y, z 的可微分向量函數，則向量函數 $\mathbf{v}$ 或以 $\mathbf{v}$ 表示的向量場，其**旋度**（curl）藉「符號性」行列式定義為

(1)
$$\operatorname{curl} \mathbf{v} = \nabla \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

$$= \left(\frac{\partial v_3}{\partial y} - \frac{\partial v_2}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial v_1}{\partial z} - \frac{\partial v_3}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y}\right)\mathbf{k}.$$

- 這是當 x, y, z 為右手系的公式。若座標為左手系，此行列式加一負號於前面 [正如第 8.3 節(2**) 式]，我們亦可使用記號 rot $\mathbf{v}$（意指「旋轉」，見範例 2）取代 curl $\mathbf{v}$。

範例 1 向量函數的旋度

- 假設 $\mathbf{v} = [yz, 3zx, z] = yz\mathbf{i} + 3zx\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ 為右手系 x, y, z，則由 (1) 式得

$$\operatorname{curl} \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ yz & 3zx & z \end{vmatrix} = -3x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + (3z - z)\mathbf{k} = -3x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + 2z\mathbf{k}.$$

範例 2 剛體的旋轉，與旋度的關係

- 在 8.3 節範例 5 我們已見過，剛體 B 繞空間一固定軸的旋轉可以大小 ω，且方向為轉軸方向的向量 **w** 表示，其中ω（＞0）為旋轉的角速率，而 **w** 的方向則是從 **w** 方向看過去時，旋轉為順時針方向。根據 8.3 節 (9) 式，旋轉的速度場可如下形式表示

$$\mathbf{v} = \mathbf{w} \times \mathbf{r}$$

- 其中 **r** 是移動點的位置向量，它是對原點在轉軸上的直角座標系而量的。假設我們選擇右手系直角座標使得其轉軸為 z 軸，則（見8.4 節範例 2）

$$\mathbf{w} = [0,\ 0,\ \omega] = \omega\mathbf{k}, \qquad \mathbf{v} = \mathbf{w} \times \mathbf{r} = [-\omega y,\ \omega x,\ 0] = -\omega y\mathbf{i} + \omega x\mathbf{j}.$$

範例 2 (續)

因此

$$\operatorname{curl} \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ -\omega y & \omega x & 0 \end{vmatrix} = [0,\ 0,\ 2\omega] = 2\omega\mathbf{k} = 2\mathbf{w}.$$

以上證明下面定理。

定理 1 旋轉的物體與旋度

旋轉的物體與旋度

旋轉剛體的速度場，其旋度為轉軸的方向，至於大小等於轉動角速度的兩倍。

定理 2 梯度，散度，旋度

梯度，散度，旋度

梯度場（gradient fields）為**無旋的**（irrotational），亦即，若連續可微向量函數為純量函數 f 的梯度，則其旋度是零向量，

$$\operatorname{curl}(\operatorname{grad} f) = \mathbf{0}. \tag{2}$$

再者，二階連續可微分的向量函數 $\mathbf{v}$，其旋度的散度是零，

$$\operatorname{div}(\operatorname{curl} \mathbf{v}) = 0. \tag{3}$$

定理 2 證明

- (2) 與 (3) 式兩者可直接從定義以簡潔的計算得證。在 (3) 式證明時，其中 6 個項係成對抵消掉。

範例 3 旋轉場與無旋場

■ 範例 2 的場不是無旋的，相似速度場可藉攪拌杯中茶或咖啡得到。8.7 節定理 3 的的重力場的 curl **p** ＝ 0。它是無旋的梯度場。

■「無旋的」一詞以表 curl **v** ＝ 0 係藉使用旋度來顯示在場中旋轉的特性。若在別處出現梯度場非以速度場形式，此場通常稱為保守的（場）（見8.7 節）。根據將旋度解釋為旋轉與散度為通量（見 8.8 節範例 2），關係式 (3) 是合理的。

■ 最後，既然旋度係以座標表示來定義，那麼我們應該做 8.7 節梯度所做的，亦即，去發現是否旋度為向量，此點是成立的，見下列定理。

定理 3 旋度的不變性

旋度的不變性

curl **v** 是向量，亦即，它的大小（長度）與方向均與空間直角座標系的選定無關。